Definizione:

Una funzione $f: V \to W$ con V e W $\mathbb{R}$-spazi vettoriali si dice **applicazione lineare** se verifica le seguenti condizioni:

(1) **rispetta la somma**

$$f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

(2) **rispetta il prodotto per scalari**

$$f(av) = a\,f(v) \quad \forall v \in V \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Conseguenza: sia $f: V \to W$ lineare

$\underline{0_V = 0 \cdot v}$ con $v \in V$ $\qquad$ $0_W = 0 \cdot w$ $\forall w \in W$.

per (2) $\quad f(0_V) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0_W$

$$\boxed{f(0_V) = 0_W}$$

$$f(-v) = f((-1)v) = (-1) f(v) = -f(v)$$

Esercizi:

Le seguenti funzioni sono lineari?

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Non è lineare perché $f(0_V) \neq 0_W$.

2) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x$ $\boxed{f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x}$

⓪ $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ sì $f(0_V) = 0_W$

① Rispettare la somma

$f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$f(v_1+v_2) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1+x_2$

$//$ sì

$f(v_1) + f(v_2) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2$ rispetta la somma.

② Rispetta il prodotto per scalari

$f(av) = af(v)$ $a \in \mathbb{R}$ $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$f(av) = f\left(a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} = ax$

$//$ Sì rispetta il prodotto per scalari

$af(v) = af\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \cdot x$

$\Rightarrow$ è lineare.

Proposizione:

La funzione $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definita

$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

è lineare.

Dim:

$$\underset{m \times \cancel{n}}{A} \underset{\cancel{n} \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{m \times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^m$$

⓪ $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$

$$f(0_{\mathbb{R}^n}) = A\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^m} \qquad A(B+C) = AB + AC$$

① Rispetta la somma $\qquad \underset{B}{v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} \qquad \underset{C}{v_2 = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}}$

$$f(v_1 + v_2) = A\begin{pmatrix} x_1 + x_1' \\ \vdots \\ x_n + x_n' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = f(v_1) + f(v_2)$$

② $f(av) = A\, a\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a\, A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. $\qquad \square$

Esercizi:

Le seguenti funzioni sono lineari?

1) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \qquad \boxed{f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x} \qquad n = 2 \qquad m = 1$

$A = (1 \;\; 0) \qquad A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) = M_{1,2}(\mathbb{R})$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 \;\; 0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot x + 0 \cdot y = x \qquad$ è lineare.

$f(v) = Av$

2) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ $\qquad A \in M_{4,3}(\mathbb{R})$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y+8z \\ y-z \\ x \\ x-7y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y+8z \\ 0x+1y-1z \\ 1\cdot x+0y+0z \\ 1\cdot x-7y+0z \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ è lineare

3) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ è lineare? $\qquad A \in M_{1,2}(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x^2$ $\qquad (a\ b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax+by$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2$ non è del tipo $ax+by$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad a=-1$ $\quad f(-v) = -f(v)$ $\quad -v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)^2 = 1$

$-f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1^2 = -1$ $\quad \neq$

$$f(v_1+v_2) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = (x_1+x_2)^2$$

$$f(v_1)+f(v_2) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2$$ // ? No $\quad$ Non rispetta la somma

Non è lineare.

3) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f_t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx^2+t \\ y \end{pmatrix}$$ per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ è lineare

$f_t(\ \ z) = (\ \ \ y\ \ )$ ... è lineare

$$f_t\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+t\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff t=0$$

Se $t \neq 0$ Non è lineare $\boxed{2 \times 3}$

Se $t=0$ $$f_0\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Esempio:

$f: M_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+2x_2-x_3\\ x_3+x_4\end{pmatrix}$$

$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+2x_2-x_3\\ x_3+x_4\end{pmatrix}$$

2×4

$$A = \begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$f(v) = Av$ è lineare

Definizione: sia $f: V \to W$ lineare
si dice nucleo di f Kernel

$$\operatorname{Ker} f := \{ v \in V \mid f(v) = 0_W \} = f^{-1}\{0_W\} \subseteq V$$

$$\operatorname{Im} f = \{ f(v) \mid v \in V \} \subseteq W$$

Domanda 2:

Proposizione: data $f: V \to W$ applicazione lineare

Proposizione: data $f: V \to W$ applicazione lineare
$\operatorname{Ker} f \leq V$.

Dim:

$\operatorname{Ker} f = \{ v \in V \mid f(v) = 0_W \}$ dimostriamo

⓪ $0_V \in \operatorname{Ker} f$

① Chiuso per la somma

② Chiuso per prodotto per scalari.

⓪ $f(0_V) = 0_W$ perché f è lineare quindi $0_V \in \operatorname{Ker} f$

① siano $v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} f$ cioè $f(v_1) = 0_W$
$f(v_2) = 0_W$

allora $v_1 + v_2 \in \operatorname{Ker} f$ perché

$$f(v_1 + v_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } f \text{ è lineare}}}{=} f(v_1) + f(v_2) = 0_W + 0_W = 0_W$$

② Sia $v \in \operatorname{Ker} f$ cioè $f(v) = 0_W$ e $a \in \mathbb{R}$
allora $av \in \operatorname{Ker} f$ perché $f(av) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } f \text{ è lineare}}}{=} a f(v) = a\, 0_W = 0_W$.

□

Def: nullità $= \dim \operatorname{Ker} f$
$\operatorname{Im} f = \{ f(v) \mid v \in V \}$

Domanda 3:

Proposizione: Se $f: V \to W$ è lineare

Proposizione: Se $f: V \longrightarrow W$ è lineare
$\text{Im} f \leq W$.

Dim:

⓪ $0_W \in \text{Im} f$ perché $0_W = f(0_V)$

① $f(v_1), f(v_2) \in \text{Im} f$ $\quad f(v_1) + f(v_2) \overset{f \text{ è lin.}}{=} f(v_1 + v_2) \in \text{Im} f$

② $a \in \mathbb{R}$ $\quad f(v) \in \text{Im} f$ $\quad a f(v) \underset{f \text{ è lin.}}{=} f(av) \in \text{Im} f.$

$\square$.

Osservazione:

$f: V \longrightarrow W$

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = f((a_1 v_1 + \dots) + a_n v_n) =$$

$$= f(a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1}) + f(a_n v_n) =$$

$$\vdots$$

$$= f(a_1 v_1) + \dots + f(a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i f(v_i)$$

$$\boxed{f\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(v_i)}$$

rispetta le combinazioni lineari.

$$\boxed{f\langle v_1, \dots, v_n \rangle} = \left\{ f\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) \mid a_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^n a_i f(v_i) \mid a_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

$$= \boxed{\langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle}$$

Esercizio:

Sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\boxed{f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ x+y \\ x-y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3}$$

3×2

$$\begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A \quad \text{è lineare.}$$

Determinare una base di $\operatorname{Ker} f$, una base di $\operatorname{Im} f$ e calcolare $f^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Sv:

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \boxed{\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}}$$

$f(v) = Av \qquad Av = \underline{0} \qquad A$ matrice di f è la matrice incompleta del sistema che def. il $\operatorname{Ker} f$.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\operatorname{Ker} f = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}} \qquad \boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 0} \qquad \boxed{B_{\operatorname{Ker} f} = \emptyset}$$

$$\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}^2) = f\langle e_1, e_2 \rangle = \langle f(e_1), f(e_2) \rangle$$

$$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sono lin. indip. perché

$f(e_2) = f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$

sono lin. indip perché non multipli

$$\boxed{B_{Imf} = \left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}} \qquad \boxed{\dim Im f = 2 = rg\, f}$$

$$2 = \dim V = \dim Ker f + \dim Im f$$
$$2 = 0 + 2$$

Formula delle dimensioni

f è suriettiva? Suriettiva $f(V) = W$ cioè $Im f = W$

$Im f \subseteq \mathbb{R}^3$ Non è suriettiva

$2 \quad 3$

Calcoliamo

$$f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \,\middle|\, f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-3y\\x+y\\x-y\end{pmatrix} = \overset{b}{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$A \mid \underline{b}$

$$\begin{cases} 2x-3y=2\\ x+y=1\\ x-y=1 \end{cases} \quad \begin{matrix}1^\circ\\ 2^\circ+3^\circ\\ 2^\circ-3^\circ\end{matrix} \begin{cases} 2x-3y=2\\ 2x=2\\ 2y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\cdot 1-3\cdot 0=2\\ x=1\\ y=0 \end{cases} \quad \begin{matrix}x=1\\ y=0\end{matrix}$$

$$f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Calcoliamo $f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}2x-3y\\x+y\\x-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ \boxed{\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y=0 \end{array}} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\cdot 0-3\cdot 0=1 \\ \boxed{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}} \end{cases}$$ impossibile

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \notin \operatorname{Im} f$$

$$f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right) = \emptyset \qquad f^{-1}(B) \qquad B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Esercizio: $f: M_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ x_1+x_2+x_3 \\ 2x_1+x_3 \end{pmatrix}$$ è lineare

Determinare base di $\operatorname{Ker} f$ e base $\operatorname{Im} f$.

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ x_1+x_2+x_3 \\ 2x_1+x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} x_1-x_2=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=x_1 \\ 2x_1+x_3=0 \\ 2x_1+x_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=x_1 \\ x_3=-2x_1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad 3^\circ = 1^\circ + 2^\circ$$

ha rango 2 in 4 incognite

n° inc. $-$ rg $= 4-2=2$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ -2x_1 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ -2x_1 & x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 2}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 2}$$

$$\boxed{B_{\operatorname{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Base $M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$\operatorname{Im} f = \left\langle f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; 2^\circ + 1^\circ$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; 2^\circ - 2 \cdot 3^\circ$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

$x_1 = 1$

$x_2 = x_3 = x_4 = 0$

$$\boxed{\dim \operatorname{Im} f = 2 \qquad B_{\operatorname{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Non è suriettiva $\dim \operatorname{Im} f = 2$ $\quad \dim \mathbb{R}^3 = 3$

È iniettiva? No perché $\operatorname{Ker} f \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

però $v_1 \neq v_2$ ma $f(v_1) = f(v_2)$

Non è iniettiva.

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$
$$4 = 2 + 2$$

Osservazione:

Se $f: V \longrightarrow W$ è lineare

$w \in W$

Se $w \notin \operatorname{Im} f$ (quindi f <u>non</u> è suriettiva)

$$f^{-1}(\{w\}) = \emptyset \qquad \operatorname{Im} f = \{f(v) \mid v \in V\}$$

Se f è iniettiva e $w \in \operatorname{Im} f$

$f^{-1}(\{w\})$ contiene un solo vettore cioè la soluzione è unica.