Formule di Grassmann

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione finita e siano U e W sottospazi di V, allora

$$\boxed{\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)}$$

$U,W\leq V$ dim. V finita

Dimostrazione:

Sia $U\cap W\leq V$ ed essendo V finitamente generato anche $U\cap W$ è finitamente generato. Scriviamo una base di $U\cap W$

$B_{U\cap W}=\{v_1,\dots,v_k\}$ $\quad\dim(U\cap W)=k$

Usiamo il teorema di completamento per completare $B_{U\cap W}$ ad una base B_U e ad una base B_W.

$B_U=\{v_1,\dots,v_k,u_{k+1},\dots,u_m\}$ $\quad\dim U=m$

$B_W=\{v_1,\dots,v_k,w_{k+1},\dots,w_n\}$ $\quad\dim W=n$

dobbiamo dimostrare

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim W-\dim(U\cap W)=m+n-k$$

Sappiamo $B_U\cup B_W$ è un insieme di generatori per $U+W$

$$\underbrace{\{\boxed{v_1,\dots,v_k},u_{k+1},\dots,u_m\}}_{m\text{ vettori}}\cup\underbrace{\{\cancel{\boxed{v_1,\dots,v_k}}\,w_{k+1},\dots,w_n\}}_{n\text{- vettori}}$$

$$B_{U+W}=\{\underbrace{v_1,\dots,v_k,u_{k+1},\dots,u_m}_{m},\underbrace{w_{k+1},\dots,w_n}_{n-k}\}\quad\text{genera } U+W$$

e ha esattamente $m+n-k$ vettori.

Quindi per dimostrare la formula è necessario e sufficiente dimostrare che i vettori in B_{U+W} sono linearmente indipendenti.

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i + \sum_{i=k+1}^{m} a_i u_i\right) + \left(\sum_{j=k+1}^{n} b_j w_j\right) = 0_V$$

dobbiamo dimostrare che $\boxed{\begin{array}{l} a_i = 0 \ \forall\, i = 1,\dots,m \\ b_j = 0 \ \forall\, j = k+1,\dots,n. \end{array}}$ e

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} a_i v_i + \sum_{i=k+1}^{m} a_i u_i} = \boxed{-\sum_{j=k+1}^{n} b_j w_j} = v$$

$B_U = \{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_m\}$ $\qquad$ $B_W = \{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$

U $\qquad$ W

$B_{U\cap W} = \{v_1, \dots, v_k\}$

$v \in U \cap W$ $\qquad$ $v = \sum_{j=1}^{k} c_j v_j$

$$-\sum_{j=k+1}^{n} b_j w_j = \sum_{j=1}^{k} c_j v_j \qquad B_W$$

$$\sum_{j=1}^{k} c_j v_j + \sum_{j=k+1}^{n} b_j w_j = 0_V$$ ma i vettori sono lin. ind.

$\Rightarrow \quad c_1 = \dots = c_k = 0$ $\qquad \boxed{b_{k+1} = \dots = b_n = 0}$

$$v = \sum_{j=1}^{k} 0\, v_j = 0_V$$

$$v = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i + \sum_{i=k+1}^{m} a_i u_i = 0_V \quad B_U \text{ sono lin.ind.}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_i = 0 \quad \forall \; i = 1, \dots, k, k+1, \dots, m.} \quad \square$$

Riassunto:

$B_{U \cap W} = \{v_1, \dots, v_k\}$ $\qquad \dim U \cap W = k$

$B_U = \{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_m\}$ $\qquad \dim U = m$

$B_W = \{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$ $\qquad \dim W = n$

$B_U \cup B_W = \{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_m, w_{k+1}, \dots, w_n\}$ genera $U+W$

ha $m+n-k$ vettori, è sufficiente dim. che sono lin. indip.

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i + \sum_{i=k+1}^{m} a_i u_i \right)}_{= v} + \underbrace{\left(\sum_{j=k+1}^{n} b_j w_j \right)}_{= -v} = 0_V$$

$\Rightarrow v \in U \cap W \qquad v = \sum_{j=1}^{k} c_j v_j'$

$\Rightarrow \begin{matrix} b_j = 0 \\ c_j = 0 \end{matrix}$ usando B_W è lin. ind. $\qquad$ sostituire

$\Rightarrow v = 0_V \quad a_i = 0$ usando B_U è lin. ind.

Esempi:

$\boxed{\mathbb{R}^4 = V}$ $\qquad U \quad \dim(U) = 2 \qquad$ sono in somma diretta?

$W \quad \dim(W) = 3 \qquad \underset{3}{W} \subseteq U+W \Rightarrow \dim(U+W) \geq 3$

$U+W \subseteq \mathbb{R}^4 \qquad \dim(U \cap W) \geq 1$

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$4 = 3 + 2 - 1$$

$$3 = 3 + 2 - 2 \qquad W \subseteq U$$

Conseguenze:

$V \quad B_V = \{v_1,\dots,v_k, v_{k+1},\dots,v_n\} \quad \dim V = n$

$U = \langle v_1,\dots,v_k \rangle \qquad W = \langle v_{k+1},\dots,v_n \rangle$

$U+W=V \qquad n = \dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

$n = \cancel{k} + n - \cancel{k} - \dim(U \cap W)$

$\Rightarrow \dim U \cap W = 0$ cioè sono in somma diretta.

$U \oplus W = V \qquad B_U \cup B_W = B_V$

Unione di basi è base $\Leftrightarrow$ sono in somma diretta.

Domanda:

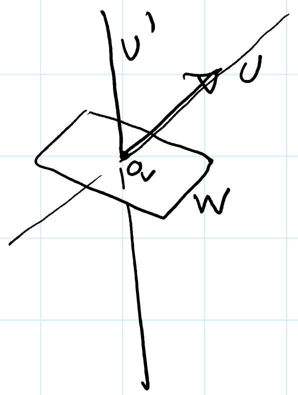
$V = \mathbb{R}^3 \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x + 2y - 8z = 0 \right\}$

determinare se esiste un sottospazio $U \leq \mathbb{R}^3$: $U \oplus W = \mathbb{R}^3$

$1 + 2 = 3$

$\Rightarrow \dim(U) = 1 \qquad U = \langle u \rangle$ e u deve completare una base di W a base di $\mathbb{R}^3$.

Teor. di compl. $\boxed{u \notin W}$



$W \oplus U = \mathbb{R}^3$

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u \notin W$

$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$u' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad U' = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$U \oplus W = U' \oplus W = \mathbb{R}^3$

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U: x_1-2x_2+x_3-x_4=0 \qquad W=\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

(a) Determinare: una base $\mathcal{B}_U$ di U, $\dim U$, una base $\mathcal{B}_W$ di W e $\dim W$, una base $\mathcal{B}_{U\cap W}$ di $U\cap W$, $\dim(U\cap W)$; una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U+W$ e $\dim(U+W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?

(b) Determinare equazioni cartesiane per W e completare la base $\mathcal{B}_U$ a una base di $\mathbb{R}^4$.

(c) Determinare una base per un sottospazio $T\leq\mathbb{R}^4$ tale che $T\oplus(U\cap W)=W$ e una base per un sottospazio $S\leq\mathbb{R}^4$ tale che $S\oplus(U\cap W)=U$

Sv:

$$W=\left\langle \underset{w_1}{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}}\right\rangle$$

$\boxed{\dim W=2}$ perché generatori lin. indip. perché non multipli fra loro

$$\boxed{B_W=\left\{\underset{w_1}{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{w_{2B}}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}\right\}}$$

$$B'_W=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$U: x_1-2x_2+x_3-x_4=0$ $\qquad$ $\dim U=3$ per R-C

n° inc. $-\,\mathrm{rg}\,A = 4-1=3$

$x_4 = x_1-2x_2+x_3$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_1-2x_2+x_3\end{pmatrix}$$

$$U=\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$x_1=1$	$x_1=0$	$x_1=0$
$x_2=0$	$x_2=1$	$x_2=0$
$x_3=0$	$x_3=0$	$x_3=1$

$$\boxed{B_U=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}}$$

Essendo $\boxed{\dim U=3}$ $\qquad$ $\underline{\dim(U+W)\leq 4}$ $\qquad$ $-\dim(U+W)\geq -4$

$\dim W=2$

per le formule di Grassmann:

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U\cap W)$$

$$\dim(U\cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) \geq 3+2-4 \geq 1$$

Non sono in somma diretta perché certamente $U\cap W \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\}$

Calcoliamo $U\cap W$

$U: \; x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \qquad 1+2-2-1=0$

$$W = \left\langle \underset{z_1}{\begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\1 \end{pmatrix}}, \underset{z_2}{\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

$w \in W \qquad w = a\begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\\-a\\b\\a \end{pmatrix} \qquad w \in U$

$U: \; \cancel{a} - 2(-a) + b - \cancel{a} = 0 \qquad 2a+b=0 \qquad \boxed{b=-2a}$

$$U\cap W = \left\{ \begin{pmatrix} a\\-a\\-2a\\a \end{pmatrix} \;\middle|\; a\in\mathbb{R} \right\} = \left\langle \underset{z_1-2z_2}{\begin{pmatrix} 1\\-1\\-2\\1 \end{pmatrix}} \right\rangle \qquad \boxed{\dim(U\cap W)=1}$$

$$\boxed{B_{U\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\-1\\-2\\1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Per Grassmann

$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U\cap W) = \qquad \boxed{\dim(U+W)=4}$

$= 3+2-1=4$

$\underset{4}{U+W} \leq \underset{4}{\mathbb{R}^4} \Rightarrow U+W=\mathbb{R}^4 \qquad B_{U+W} = \{ e_1, e_2, e_3, e_4 \}$

b) Equazioni cartesiane per W:

$$W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\-a\\b\\a\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{x_1 = a} \\ x_2 = -a \\ x_3 = b \\ x_4 = a \end{cases} \qquad a = x_1$$

eliminazione dei parametri

$$\begin{cases} x_2 = -x_1 \\ \cancel{x_3 = b} \\ x_4 = x_1 \end{cases} \qquad b = x_3 \qquad \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_4 = x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{W: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}}$$

Completare B_U ad una base di $\mathbb{R}^4$

$U: x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$ $\qquad \dim U = 3$ $\qquad$ manca un vettore per avere una base di $\mathbb{R}^4$

$\dim \mathbb{R}^4 = 4$

$\bar{v} \in \mathbb{R}^4 \setminus U \qquad \bar{v} \notin U$

$$\boxed{\bar{v} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{completa } B_U \text{ a base di } \mathbb{R}^4}$$

$$B_U = \left\{ \underset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}}, \underset{u_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}} \right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{v} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ completa B_U a base di $\mathbb{R}^4$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

(c) Determinare una base per un sottospazio $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus (U \cap W) = W$ e una base per un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^4$ tale che $S \oplus (U \cap W) = U$

$B_T \qquad T \leq \mathbb{R}^4 : \quad T \oplus (U \cap W) = W$

$$T \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\dim T + 1 = 2$

$\boxed{\dim T = 1}$

$B_T \cup B_{U \cap W}$ deve essere base di W

Prendere $t \in W$ $t \notin U \cap W$ ad esempio

$t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa le richieste

$T \oplus (U \cap W) = W$

$1 + 1 = 2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ completare a base di W

Determinare un sottospazio $S \leq \mathbb{R}^4$ tale che

$$\boxed{\begin{matrix} S \oplus (U \cap W) = U \\ 2 + 1 = 3 \end{matrix}}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = U \cap W$$

$$B_U = \left\{ \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$u_1 \quad \underline{u_2 \quad u_3}$$

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$u \in U \qquad u \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} a+b \\ -a \\ -2a \\ a+b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} a \\ -a \\ a+3b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$