Come eliminare generatori per estrarre una base:

$G = \{v_1, .., v_n\}$ generatori. Se sono lin. dip. possiamo eliminarne uno $v_i \iff a_i \neq 0$ in una relazione di dipendenza.

Come aggiungere vettori in modo che restino lin. ind

$I = \{u_1, .., u_m\}$ lin. indip..

L'insieme $\{u_1, .., u_m, u\}$ è lin ind. $\iff u \notin \langle u_1, .., u_m \rangle$

Osservazione:

Dato un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V fin. generato.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $B = \{v_1, .. v_n\}$ è base di V
2. B è insieme di generatori minimale
3. B è insieme di vettori lin. indipendenti massimale.

Teorema dello scambio:

Sia $I = \{u_1, .., u_k\}$ vettori linearm. indipendenti in V

e $G = \{w_1, ..., w_p\}$ generatori di V

allora $k \leq p$.

Dim:

Idea: cerchiamo di scambiare i vettori di I con quelli di G.

$$\{w_1,\dots,w_p\} \subseteq \underbrace{\{w_1,\dots,w_p,u_1\}}^{p+1 \text{ elementi}} = L_0$$

$$\underbrace{\{w_1,\dots,w_p\}}_{G_0} \qquad \{u_1,w_2,\dots,w_p\} = G_1 \subseteq L_0$$

ha p elementi

p -elementi

Sia $u_1 \in I$ essendo $G = \{w_1,\dots,w_p\}$ generatori di V

$u_1 = \sum_{i=1}^{p} a_i w_i$ $\qquad L_0 = \{w_1,\dots,w_p,u_1\}$ $p+1$ vettori

$1 \cdot u_1 - \sum_{i=1}^{p} a_i w_i = 0_V$ è relazione di dipendenza fra i vettori di L_0

In questa relazione c'è almeno un coefficiente $a_i \neq 0$ con $1 \leq i \leq p$ perché se fossero $a_i = 0 \ \forall \ i = 1,\dots,p$ otterremmo $u_1 = 0_V$ ma questo è impossibile $u_1 \in I$ è lin. indip.

A meno di scambiare l'ordine dei vettori w_i possiamo supporre $a_1 \neq 0$

$u_1 - a_1 w_1 - a_2 w_2 - \dots - a_p w_p = 0_V$

$$\underset{\text{generatore}}{G = \{w_1,\dots,w_p\}} \subseteq L_0 = \{w_1,\dots,w_p,u_1\} \text{ generatori} \supseteq \underset{\text{genera } V}{G_1 = \{u_1,w_2,\dots,w_p\}}$$

Scambiamo u_2 con w_2 $\quad u_2 \in V = \langle u_1, w_2,\dots,w_p \rangle$

$u_2 = a_1 u_1 + a_2 w_2 + \dots + a_p w_p$

$a_1 u_1 - u_2 + a_2 w_2 + \dots + a_p w_p = 0_V$ è rel. di dipen. in L_1.

$$\mathcal{G}_1 = \{u_1, w_2, \dots, w_p\} \quad \subset \quad \mathcal{L}_1 = \{u_1, w_2, \dots, w_p, u_2\} \qquad \mathcal{G}_2 = \{u_1, u_2, w_3, \dots, w_p\}$$

esiste sempre un coeff. $a_i \neq 0$ con $i \in \{2, \dots, p\}$

perché se fossero tutti zeri $a_1 u_1 - u_2 = 0_V$ impossibile perché

$u_1, u_2 \in \mathcal{I}$ lin. indipendente. Possiamo supporre $a_2 \neq 0$

$\Rightarrow \mathcal{G}_2 = \{u_1, u_2, w_3, \dots, w_p\}$ genera V.

Continuiamo a scambiare.

$\mathcal{I} = \{u_1, \dots, u_k\} \qquad \mathcal{G} = \{w_1, \dots, w_p\}$

Se $k \leq p$ dopo k volte

$$\mathcal{G}_k = \{u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_p\}$$

Se per assurdo $k > p$

$\mathcal{I} = \{u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_k\}$ dopo p-volte

$\mathcal{G}_p = \{u_1, \dots, u_p\}$ generatore di V ma $u_{p+1} \in \mathcal{I}$

e $u_{p+1} \notin \langle u_1, \dots, u_p \rangle$ perché $\mathcal{I}$ è insieme lin. indip.

ma $u_{p+1} \in \langle u_1, \dots, u_p \rangle$ perché $\mathcal{G}_p$ genera quindi è assurdo. $\square$

Corollario: se V è $\mathbb{R}$-spazio vettoriale finitamente generato allora tutte le basi hanno la stessa cardinalità che viene detta dimensione di V $\quad \dim V$.

Dim:

$\mathcal{B}$ base $=$ generatore $+$ lin. indip. $\qquad \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ basi

$\mathcal{B}_1 = \{w_1, \dots, w_p\} \qquad \mathcal{B}_2 = \{u_1, \dots, u_k\} \qquad$ Tesi $k = p$.

B_1 generatori
B_2 lin. indip.   T. dello scambio $\Rightarrow$ $k \leq p$

B_1 lin indip.   T. dello scambio $\Rightarrow$ $p \leq k$
B_2 generatori

$\Rightarrow$ $\boxed{p=k}$. $\square$

Esercizio: $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2a+b & c+2d \\ c+2d & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

① Verificare che W è sottospazio di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ e determinarne due basi diverse: B_1 e B_2.

② Completare la base B_1 a base di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Sv:

$$\begin{pmatrix} 2a+b & c+2d \\ c+2d & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 2d \\ 2d & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ d\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \left\{ a\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{w_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{w_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{w_4} \rangle$$ per quanto visto è sottospazio.

$$\boxed{w_4 = 2w_3}$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle \qquad \mathbb{R}^4 \qquad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \rightleftarrows \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

$w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4$

$$\boxed{0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 - 2 \cdot w_3 + w_4 = 0_V}$$ rel. di dipendenza

possiamo eliminare il w_4 perché $a_4 = 1 \neq 0$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$\{w_1, w_2, w_3\}$ sono lin. indipend.

perché $w_1 \neq 0_V$ $\quad w_2 \notin \langle w_1 \rangle \quad w_3 \notin \langle w_1, w_2 \rangle$

perché la seconda entrata è 1.

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \right\} \qquad \dim W = 3$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$B_W = \{w_1, w_2, w_3\}$$

$B_2 = \{3w_1, w_2, w_3\}$ è base di W

$$\langle 3w_1, w_2, w_3 \rangle \subseteq \langle w_1, w_2, w_3 \rangle \subseteq \langle 3w_1, w_2, w_3 \rangle$$

$B_1 = \{w_1, w_2, w_3\}$ $\qquad B_3 = \{w_2, w_1, w_3\}$

$B_2 = \{3w_1, w_2, w_3\}$ $\qquad B_4 = \{w_1 + w_2, w_2, w_3\}$

② $B_1 = \left\{ \underset{w_1}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{w_3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \right\}$ $\dim W = 3$

$\dim M_{2,2}(\mathbb{R}) = 4$

Essendo $\dim M_{2,2}(\mathbb{R}) = 4$ e $\dim W = 3$ per completare B_1 a base di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ dobbiamo aggiungere un vettore $w_4 \notin \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$

Mettere in riga i vettori e cercare i pivot mancanti

$$\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduciamo con Gauss

$$\begin{array}{c} \frac{w_1}{2} \\ w_2 - \frac{w_1}{2} \\ w_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \frac{w_1}{2} \\ w_3 \\ w_2 - \frac{w_1}{2} \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$w_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ soddisfa la richiesta

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3000 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sono lin. indipendenti

Per completare a base posso aggiungere $w_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

oppure $w_4' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Osservazione:

Sia A una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ le operazioni elementari sulle righe di A non alterano il sottospazio generato dalle righe.

$w_1 = (a_{11} \dots a_{1n}) \qquad \mathbb{R}^n$

$\vdots$

$w_m = (a_{m1} \dots a_{mn}) \qquad \mathbb{R}^n$

Lo spazio generato dalle righe è

$$\langle w_1, \dots, w_m \rangle = \langle w_2, w_1, w_3, \dots, w_m \rangle$$
$$= \langle a w_1, w_2, \dots, w_m \rangle \qquad a \neq 0$$
$$= \langle w_1 + b w_2, w_2, \dots, w_m \rangle$$

Si chiama rango righe di A la $\dim \langle w_1, \dots, w_m \rangle$.

Con operazioni elementari la matrice la possiamo ridurre in forma a scala, in forma a scala le righe non nulle sono sempre lin. indipendenti

$$\dim \langle w_1, \dots, w_m \rangle = \operatorname{rg} \bar{A} \qquad \text{con } \bar{A} \text{ matrice ridotta}$$

Applicazione: $\qquad \mathbb{R}^4$

$$W = \left\langle \underset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{w_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}}, \underset{w_4}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

determinare una base

Mettere i vettori in riga, le righe non nulle delle ridotta sono una base di W.

$$\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} w_1 \\ w_4 \\ w_3 - w_1 \\ w_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} w_1 \\ w_4 \\ w_3 - w_1 - 4w_4 \\ w_2 - 2w_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \dim W = 3$$

Esempio:

In $\mathbb{R}^4$

$$W_a = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$ calcolare la $\dim W_a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Calcolare il rango della matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad rg\, A_a = 3 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

se $a = 0$ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Completare a base = aggiungere "i pivot mancanti"

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\quad\ \uparrow\ \uparrow$$

devo aggiunge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Def: due sottospazi sono in somma diretta

$\boxed{U \cap W = \{0_V\}}$ $\qquad U \oplus W$

Sia V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\quad B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$

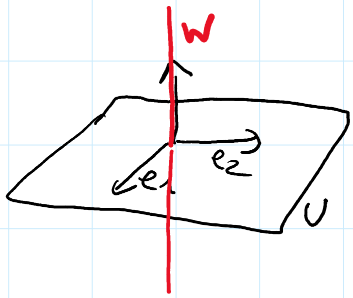
k

$U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \qquad \dim U = k$

$W = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle \qquad \dim W = n-k$

$U \oplus W = V$

$k + (n-k) = n$



$\mathbb{R}^3$

$U = \langle e_1, e_2 \rangle$

$W = \langle e_3 \rangle$

$U \oplus W = V$