Base

Ⓐ Generatori

Ⓑ Linearmente indipendenti

Teorema della scelta di una base
estrazione di una base:

Sia $\mathcal{G} = \{u_1, .., u_k\}$ un insieme di generatori di uno spazio vettoriale V allora esiste una base $B \subseteq \mathcal{G}$ dello spazio V.

Dim:

Procedimento:

Passo 1: l'insieme $\mathcal{G}$ è linearmente indipendente?

Se SÌ $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ è una base $B = \mathcal{G}$.

Se NO passare al passo 2:

Passo 2: dato che $\mathcal{G}$ è lin. dipendente quindi scriviamo una relazione di dipendenza

$\boxed{a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k = 0_V}$ con almeno un coeff. $a_i \neq 0$ con $i \in \{1, .., k\}$

Individuare un coeff. non nullo a meno di riordinare i vettori possiamo supporre $a_k \neq 0$ esiste $\frac{1}{a_k}$

$$a_k u_k = -a_1 u_1 - \dots - a_{k-1} u_{k-1}$$

$$u_k = -\frac{a_1}{a_k} u_1 - \dots - \frac{a_{k-1}}{a_k} u_{k-1} \in \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle$$

allora

$$\langle u_1,\dots,u_k\rangle \subseteq \langle u_1,\dots,u_{k-1}\rangle \subseteq \langle u_1,\dots,u_k\rangle$$

perché $u_1,\dots,u_{k-1},u_k$ appartengono al $\langle u_1,\dots,u_{k-1}\rangle$

$\Rightarrow V=\langle u_1,\dots,u_k\rangle = \langle u_1,\dots,u_{k-1}\rangle$

$G_1=\{u_1,\dots,u_{k-1}\}$ genera V. Rincominciare il Passo 1 usando G_1.

Il procedimento si conclude ottenendo una base. $\square$

Esempi:

a) $V=\langle(1,0,0,1),(0,1,0,0)\rangle$ e $W=\langle(0,1,0,1),(1,0,0,0)\rangle$
[R. $V+W=\langle(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,0,0,0)\rangle$, $V\cap W=\langle(1,1,0,1)\rangle$.]

$\mathbb{R}^4$ $\quad V=\left\langle \underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}} \right\rangle \qquad W=\left\langle \underset{w_1}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}} \right\rangle$

$v_1+v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad w_1+w_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

Determinare B_V, B_W, B_{V+W}, $B_{V\cap W}$.

n° elementi di una base di V si dice dimensione di V $\dim V$.

$G_V=\{v_1,v_2\}$ sono lin indip. perché non multipli fra loro quindi sono una base di V.

$\dim V=2$

$G_W=\{w_1,w_2\}$ sono lin. indip. perché non multipli fra loro quindi sono una base di W

$\dim W=2$

$V+W = \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle \qquad v_1+v_2 = w_1+w_2$

$v_1+v_2-w_1-w_2 = 0_V$

$a_1=1 \quad a_2=1 \quad a_3=-1 \quad a_4=-1$

$a_1v_1+a_2v_2+a_3w_1+a_4w_2 = 0_V$

$a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{cases} a_1+a_4=0 \\ a_2+a_3=0 \\ \cancel{0=0} \\ a_1+a_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1=-a_3 \\ a_2=-a_3 \\ a_4=-a_1=a_3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a_3=-1 \\ a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_4=-1 \end{matrix}$

$v_1+v_2-w_1-w_2=0_V$

essendo $a_3=-1$ possiamo eliminare w_1

$V+W = \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle = \langle v_1, v_2, w_2 \rangle$

$\mathcal{G}_1 = \{v_1, v_2, w_2\} \qquad \underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}$

sono linearmente indipendenti?

$av_1+bv_2+cw_2 = \begin{pmatrix}a+c\\b\\0\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \overset{0=0}{a+c=0} \\ b=0 \\ a=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{cases}$

Sì $\quad B_{V+W} = \{v_1, v_2, w_2\} \qquad \dim(V+W)=3$

$V\cap W \qquad \underbrace{v_1+v_2}_{V} = \underbrace{w_1+w_2}_{W} \quad \Rightarrow v_1+v_2 \in V\cap W$

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \in V\cap W$

$v \in V = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle$

$v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\0\\a\end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} \cancel{x=a} \\ y=b \\ z=0 \\ t=a \end{cases}$ eliminare a e b

$a = x$

$\begin{cases} \cancel{y=b} \\ z=0 \\ t=x \end{cases}$ $\quad b=y \quad$ $V: \begin{cases} z=0 \\ x-t=0 \end{cases}$ eq. cartesiane

$W = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \rangle$ $\quad w = a\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\a\\0\\a\end{pmatrix}$ $\quad w \in V$ se e

solo $\begin{cases} 0=0 \\ b-a=0 \end{cases}$ $\quad a=b \quad$ $V \cap W = \left\{ \begin{pmatrix}a\\a\\0\\a\end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\} =$

$= \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$ è lin. indip. perché è diverso da 0_V.

$B_{V \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

$\dim V \cap W = 1$

$\dim V+W = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$

$3 = 2 + 2 - 1$

Esempio: $\mathbb{R}^2$ $\quad G = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}} \right\}$ generano $\mathbb{R}^2$

determinare tutte le basi di $\mathbb{R}^2$ contenute in G.

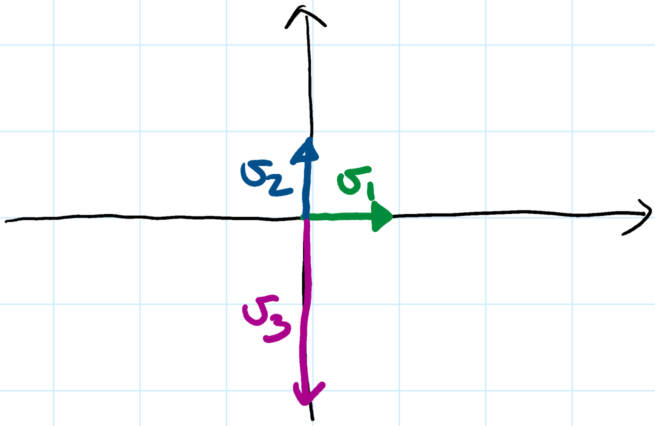
$v_3 = -2v_2 \qquad 2v_2 + v_3 = 0_V$

$0\cdot v_1 + 2v_2 + 1\cdot v_3 = 0_V$

$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ possiamo eliminare v_2 perché $a_2 = 2 \neq 0$

$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ possiamo eliminare v_3 perché $a_3 = 1 \neq 0$

__Non__ si può eliminare v_1 perché $a_1 = 0$.

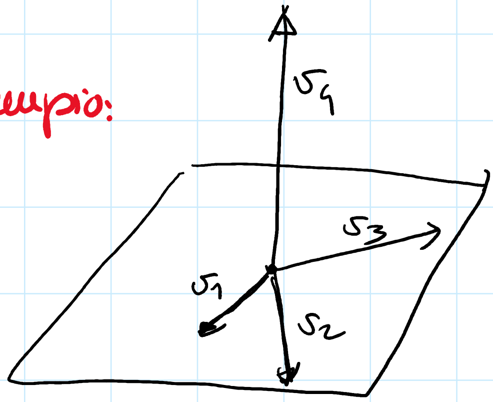


$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

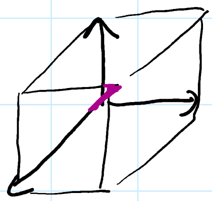
Esempio:



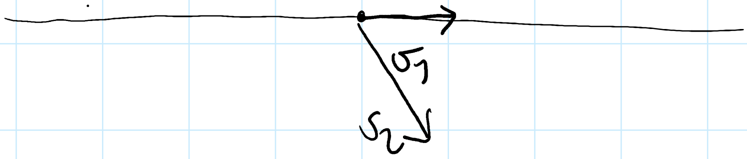
$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{v_4}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 0_V$



Esempio: cercare una base di $\mathbb{R}^2$ che contenga v_1 ; si cerca $v_2 \notin \langle v_1 \rangle$



Proposizione: se $\{u_1, \dots, u_k\}$ sono linearmente indipendenti e $u \in V$ (tutti vettori di V).

Allora $\{u_1, \dots, u_k, u\}$ è lin. indipendente se $\Longleftrightarrow$ e solo se $u \notin \langle u_1, \dots, u_k \rangle$.

Dim: se $u \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ per il criterio di dipendenza $\{u_1, \dots, u_k, u\}$ sarebbero lin. dipendenti

"$\Longrightarrow$"

"$\Longleftarrow$" supponiamo $\{u_1, \dots, u_k\}$ siano lin indip.

$u \notin \langle u_1, \dots, u_k \rangle$

e supponiamo per assurdo che $\{u_1, \dots, u_k, u\}$ sia lin. dipendente $a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + a u = 0_V$ con almeno un coeff. diverso da 0.

Se $a \neq 0$ allora $au = -a_1 u_1 - \dots - a_k u_k$

$$u = -\frac{a_1}{a} u_1 - \dots - \frac{a_k}{a} u_k \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$$

è contro l'ipotesi $u \notin \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ assurdo!

Se $a = 0$ $\sum_{i=1}^{k} a_i u_i = 0_V$ con un coeff. non nullo ma è assurdo perché avevamo supposto $\{u_1, \dots, u_k\}$ fossero lin. indipendenti. $\square$

Esempio: Su $\mathbb{R}^3$ $I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ determinare un vettore $u \in \mathbb{R}^3$ tale che l'insieme $I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u \right\}$ sia lin. indipendente.

$u \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è lin. indip.

Cercare un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v \right\}$ sia lin. indipendente.

$$v \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a+b \\ 3a \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a=0 \\ 2a+b=0 \\ 3a=1 \end{cases}$$

impossibile

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ sono lin. indip. in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio: $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ determinare due vettori v_1, v_2

v
v_1
v_2

abbia matrice ridotta a scala di rango 3.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Teorema di completamento della base:

Sia $I = \{u_1, \dots, u_k\}$ insieme di vettori lin. indipendenti in un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V di dimensione finita, allora esiste una base $I \subseteq B$ B base di V.

Dim:

Passo 1: I è insieme di generatori?

Se sì $B = I$ è una base.

Se No passiamo al Passo 2.

Passo 2: se I non genera V esiste un vettore $u_{k+1} \notin \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ quindi per la proposizione precedente $I_1 = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}\}$ è lin. indipendente.

Ricomincia dal passo 1 usando I_1.

Essendo V finitamente generato dopo un numero finito di passi si ottiene una base. $\square$.

Per definizione $V = \{0_V\}$ $B_{\{0_V\}} = \emptyset$ $\dim\{0_V\} = 0$.