

Somma di sottosp.

$$V \quad U \leq V$$

$$W \leq V$$

$$U+W = \{u+w \mid u \in U, w \in W\} \leq V$$

Proposizione:

Dato V un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale

$$U = \langle u_1, \dots, u_h \rangle \leq V$$

$$W = \langle w_1, \dots, w_k \rangle \leq V \quad \text{allora}$$

$$U+W = \langle u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k \rangle.$$

Dim:

$$U+W = \{u+w \mid u \in U, w \in W\} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^h a_i u_i + \sum_{j=1}^k b_j w_j \mid a_i, b_j \in \mathbb{R} \begin{array}{l} \forall i=1, \dots, h \\ \forall j=1, \dots, k \end{array} \right\}$$

$$= \langle u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k \rangle$$

□.

Definizione: due sottospazi U, W di uno spazio vettoriale V si dicono in **somma diretta** se

$$U \cap W = \{0_V\}$$

$$U+W = U \oplus W = \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$$

$\oplus$ indica che sappiamo che $U \cap W = \{0_V\}$.

Esempi:

$$\textcircled{1} \quad \mathbb{R}^3 \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \right\} \quad z = -x-y$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

U e W sono in somma diretta?

$$U \cap W \quad w = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ a+a+0=0 \end{array} \quad 2a=0 \Rightarrow a=0$$

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{SÌ sono in somma diretta}$$

e $U \oplus W$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\begin{array}{cc} x=1 & x=0 \\ y=0 & y=1 \end{array}$

$$U \oplus W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \stackrel{?}{=} \mathbb{R}^3$$

Es: $\{1, 3, 5\} \quad \langle 1, 3, 5 \rangle = \langle 1 \rangle = \mathbb{R}$

$\begin{array}{l} 3=3 \cdot 1 \\ 5=5 \cdot 1 \end{array}$

Definizione: dato un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale V e un insieme finito di vettori $v_1, \dots, v_n$ si dice che è **linearmente indipendente** se:

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0_V \iff a_i = 0 \quad \forall i=1, \dots, n.$$

Se al contrario esistono $a_1, \dots, a_n$ non tutti nulli tali che $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0_V$ allora $v_1, \dots, v_n$ si dicono

linearmente dipendenti e la combinazione lineare

$\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0_V$ con almeno un coeff. $a_i \neq 0$ si dice **relazione di dipendenza**.

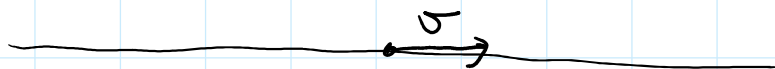
Esempi:

1) $V = \mathbb{R}^3$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\{v_1\}$ è lin. indep.?

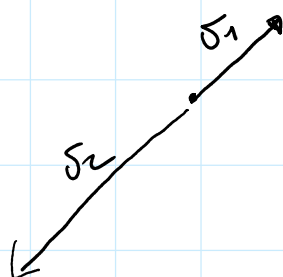
$$\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0_V \implies a_i = 0 \quad \forall i=1, \dots, n.$$

$n=1$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies a_1 = 0$
 $\Rightarrow \{v_1\}$ è lin. indep.

Fatto: $\forall v \in V$ $v \neq 0_V$ $\{v\}$ è lin. indipendente perché $av = 0_V \implies a = 0$ perché $v \neq 0_V$.



2) $V = \mathbb{R}^2$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ sono lin. indep.? NO



$$v_2 = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2v_1$$

$$v_2 = -2v_1$$

$$2v_1 + v_2 = 0_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 0_V$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 1$$

Relazione di dipendenza.

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0_V \quad \text{con almeno un } a_i \neq 0$$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0_V$$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 - 2a_2 \\ a_2 - 2a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 - 2a_2 = 0 \\ a_1 - 2a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 - 2a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$a_1 = 2a_2$$

cerchiamo una relazione di dipendenza

$$a_2 = 1$$

$$a_1 = 2$$

$$2v_1 + v_2 = 0_V$$

$$-2v_1 - v_2 = 0_V$$

Prop. L'insieme dato da due vettori $\{v_1, v_2\}$ in V è linearmente dipendente $\Leftrightarrow$ un vettore è multiplo dell'altro.

Dim. v_1, v_2 lin. dipendenti $\Leftrightarrow$

esiste una relazione di dipendenza $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0_V$

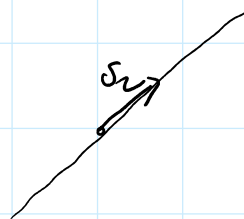
$$\text{con } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

① se $a_1 \neq 0$ $a_1 v_1 = -a_2 v_2$ $v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2$

② se $a_2 \neq 0$ $a_2 v_2 = -a_1 v_1$ $v_2 = -\frac{a_1}{a_2} v_1$

① $v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 \Rightarrow v_1 \in \langle v_2 \rangle$

② $v_2 = -\frac{a_1}{a_2} v_1 \Rightarrow v_2 \in \langle v_1 \rangle$



Il vic. è evidente

Oss: Se $A = \{0_V, v_1, \dots, v_n\}$ allora A è linearmente dipendente

$$1 \cdot 0_V + 0v_1 + \dots + 0v_n = 0_V \quad \text{è relazione di dipendenza}$$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad \dots \quad a_n = 0$$

Esempio:

$$V = M_{2,2}(\mathbb{R}) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sono lin. indipendenti?

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0_V$$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + 2a_3 & a_1 + a_2 + 3a_3 \\ 0 & a_1 + a_2 + 3a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + 3a_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ a_1 + a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = -2a_3 \\ a_2 = -a_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 = -1 \\ a_2 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$2v_1 + v_2 - v_3 = 0_V$$

sono linearmente
dipendenti

è una relazione di
dipendenza.

$$v_3 = 2v_1 + v_2 \quad v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$$

Criterio di dipendenza: sia V un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale
 $S = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Allora S è linearmente dipendente se e solo se esiste un vettore $v \in S$ che sia combinazione lineare dei vettori di $S \setminus \{v\}$.

$$S \text{ lin. dip.} \iff \exists v \in S: v \in \langle S \setminus \{v\} \rangle.$$

Dim:

$v_1, \dots, v_n$ sono lin dipendenti $\iff$
esiste una relazione di dipendenza
 $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0_v$ con almeno un coefficiente non nullo

a meno di scambiare l'ordine dei vettori possiamo
supporre $a_1 \neq 0$ $a_1 v_1 + \sum_{i=2}^n a_i v_i = 0_v$
 $a_1 v_1 = - \sum_{i=2}^n a_i v_i$ $a_1 \neq 0$ $v_1 = \sum_{i=2}^n \left(-\frac{a_i}{a_1}\right) v_i$

$$v_1 \in \langle v_2, \dots, v_n \rangle.$$

Quiz: Se $\{v_1, \dots, v_5\}$ sono vettori linearmente
dipendenti allora $v_1 \in \langle v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$.

☒ Falso
☐ Vero

Esempio: $\mathbb{R}^5$ $S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = e_2, v_4 = e_3, v_5 = e_4 \right\}$
 S è lin. dipendente perché

$$v_2 \in \langle v_1, v_3, v_4, v_5 \rangle \quad v_2 = 0 \cdot v_1 + 0 v_3 + 0 v_4 + 0 v_5$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

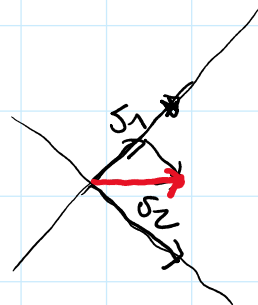
Definizione: dato V un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale finitamente generato un insieme $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di generatori di V linearmente indipendenti viene detto **base di V** .

Esempio:

$$\mathbb{R}^2 \quad B = \left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è base di } \mathbb{R}^2.$$

- **Lin indipendenti** $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ e non sono multipli
 $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ fra loro

$\Rightarrow$ sono lin. indipendenti



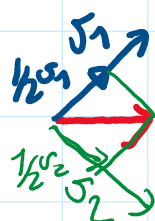
- **B genera $\mathbb{R}^2$**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ha soluzioni}$$

$$\begin{cases} a + b = x \\ a - b = y \end{cases} \quad \begin{matrix} 1^o + 2^o \\ 1^o - 2^o \end{matrix} \quad \begin{cases} 2a = x + y \\ 2b = x - y \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{x+y}{2} \\ b = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a = 1/2 \\ b = 1/2$$



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = B \text{ è base di } \mathbb{R}^2$$

Prop: dato un $\mathbb{R}$ -sp. vettoriale V

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti
essi sono una base di $W = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ e ogni
vettore $w \in W$ si scrive in modo **unico** come

$$w = \sum_{i=1}^n a_i v_i \quad \text{e i coefficienti}$$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ vengono detti coordinate del vettore w rispetto
alle base $\{v_1, \dots, v_n\}$.

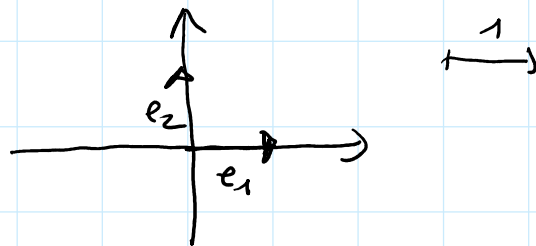
Esempi: $\mathbb{R}^3 \quad W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$
è base di W

$$w = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Le coordinate di w rispetto a B sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Osservazione Le basi sono sempre ordinate

$$\mathbb{R}^2 \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ le coordinate di $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nelle base

canonice e sono $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ha}$$

coordinate $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ rispetto alla base B .



Esercizi:

Siano $W = \langle \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{v_4}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \rangle$

Mettiamo in riga i vettori

$$\begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Riduciamo con Gauss

$$\begin{array}{l} v_1 \\ v_2 - v_1 \\ v_3 \\ v_4 - v_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} v_1 \\ -v_4 + v_1 \\ v_3 \\ v_2 - v_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &v_1 \\ &v_1 - v_4 \\ &\boxed{v_3} \end{aligned}$$

$$\boxed{(v_2 - v_1) + 2(v_1 - v_4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{4^{\circ}R - 3R^{\circ}}$$

$$\begin{aligned} &v_1 \\ &v_1 - v_4 \\ &v_3 \\ &v_2 - v_1 + 2v_1 - 2v_4 - 3v_3 \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{v_1 + v_2 - 3v_3 - 2v_4 = 0_{\mathbb{R}^3}} \text{ Relaz. dip.}$$

Verifichiamo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1-2 \\ 2-2 \\ 1-3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$