Lezione7

lunedì 14 ottobre 2024 16:06

# Sottospazi Vettoriali

$V$ sp. vett su $K = \mathbb{R}$

$W \subseteq V$

1. $0_V \in W$ (quindi $W \neq \emptyset$)
2. Chiusura per la somma $\forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 + w_2 \in W$
3. Chiusura per prodotto per scalari $\forall a \in K \ \forall w \in W \quad aw \in W$

## Esercizi:

$V = \mathbb{R}^2$. I seguenti sottoinsiemi sono sottospazi?

1) $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sì

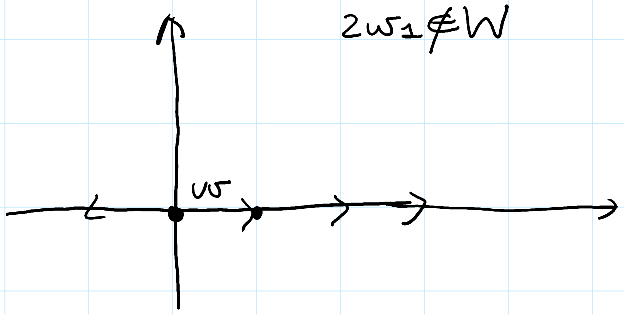
2) $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ NO $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$

Non è chiuso per la somma

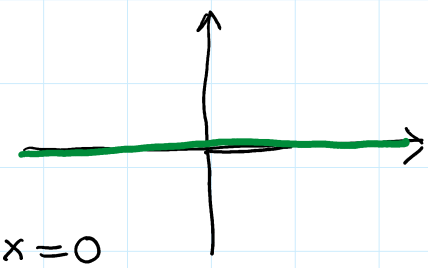
Se $2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$

$2w_1 \notin W$

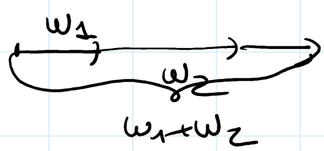
Non è chiuso per prodotto per scalari.




3) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$



1. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ sì $x = 0$
2. Ch per somma: $w_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$




$w_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$

$w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ sì $x = x_1 + x_2$

③ Ch. per prod. per scalari: $a \in \mathbb{R}$ $\quad w = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad aw = \begin{pmatrix} ax_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$

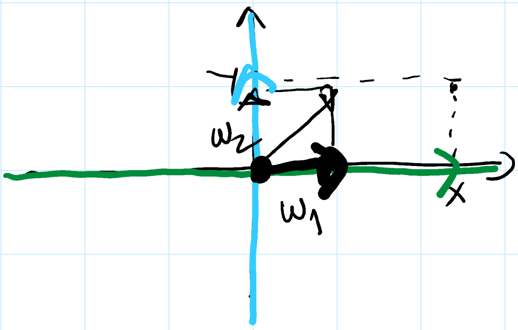
$x = ax_1$

$W \leq \mathbb{R}^2$

---

**Esercizio:** $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \ xy = 0 \right\}$ $\quad xy = 0 \iff$ $x=0$ oppure $y=0$

$x=0$
$y=0$




① $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ $\quad$ SI $\quad 0 \cdot 0 = 0$

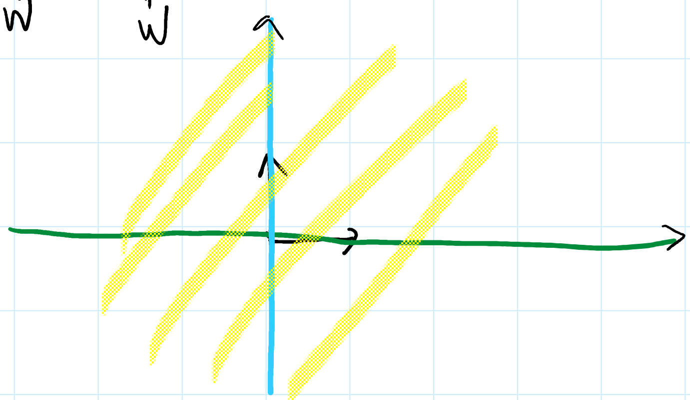
③ $a \in \mathbb{R}$ $\quad w \in W$ $\quad w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad xy = 0$

$aw = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$ $\quad (ax)(ay) = a^2 xy = a0 = 0$

$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$

quindi $w_1 + w_2 \notin W$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underset{\substack{\Uparrow \\ W}}{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}} + \underset{\substack{\Uparrow \\ W}}{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}}$



$\mathbb{R}^2 \leq \mathbb{R}^2$

**Es:**

$\mathbb{R}^3 = V \qquad K = \mathbb{R}$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x - y = 0 \right\}$$

① $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W \qquad 2 \cdot 0 - 0 = 0 \qquad$ SÌ

② Ch. per la somma

$w_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad 2x_1 - y_1 = 0$

$w_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad 2x_2 - y_2 = 0$

$$w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \qquad 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) =$$

$$= 2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_2 =$$

$$= \underbrace{(2x_1 - y_1)}_{0} + \underbrace{(2x_2 - y_2)}_{0} = 0 + 0 = 0$$

③ $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad 2x - y = 0 \qquad a \in \mathbb{R}$

$$aw = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix} \qquad 2(ax) - ay = 2ax - ay = a(2x - y) = a \cdot 0 = 0$$

Ch. per prod. per scalari

**Nota bene:** $ax+by+cz=0$

**Es:** $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, z^2=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, z=0\right\}$ equaz. cartesiane

$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, x,y\in\mathbb{R}\right\}$ parametrica

$W=\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, x,y\in\mathbb{R}\right\}$ come comb. lineari

**Definizione:** dato $V$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e fissati $v_1,\dots,v_n\in V$ il vettore

$$v=a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_nv_n=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i$$

si dice **combinazione lineare** dei vettori $v_1,\dots,v_n$ con coefficienti $a_1,\dots,a_n$ con $a_i\in\mathbb{R}$ $\forall\, i=1,\dots,n$.

**Esempi:**

1. $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad V=\mathbb{R}^3$

$$a_1v_1+a_2v_2=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\0\end{pmatrix}$$

2. $V=M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$2\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}=v$$

$a_1=2$ $\quad v_1=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$

$a_2=3$ $\quad v_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$a_3=-1$ $\quad v_3=\begin{pmatrix}0&0\\2&1\end{pmatrix}$

③ $V = \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ $\quad a_1 = 3 \quad v_1 = x^2 - x + 1 \quad a_2 = -2 \quad v_2 = x - 3$

$$3(x^2 - x + 1) - 2(x-3) =$$
$$= 3x^2 - 3x + 3 - 2x + 6 =$$
$$= 3x^2 - 5x + 9$$

$$\downarrow$$
$$3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-5\\3\end{pmatrix}$$

**Osservazione:** se $W$ è sottospazio di $V$ allora $W$ è chiuso per combinazioni lineari:

se $w_1, \dots, w_n \in W$ $\quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $\quad n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i w_i \in W$$

**Definizione:** un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale $V$ si dice **finitamente generato** se esistono un numero finito di vettori $v_1, \dots, v_n$ $\quad n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$ tali che ogni vettore di $V$ sia combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_n$ che vengono detti **generatori** di $V$.

**Esempi:**

1) $V = \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ è

combinazione lineare dei vettori $\underset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$ con coefficienti $x$ e $y$.

2) $V=\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

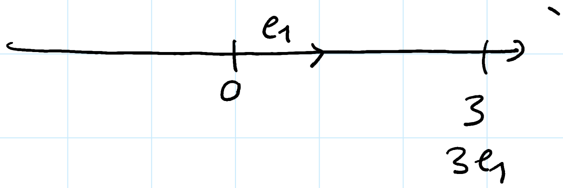
**Domanda:** i generatori sono unici? $K=\mathbb{R}$.

Se $V=\{0\}$ allora c'è solo $0_V$ e non servono generatori

Se $n=1$ $V=\mathbb{R}$ base canonica $\{e_1\}=\{1\}$

$x = x\cdot 1$ $\quad a=x \quad v=1$

$x=\left(\frac{x}{3}\right)\cdot 3$ $\quad a=\frac{x}{3} \quad v=3$




se $y\neq 0$ $\quad x=\frac{x}{y}y \quad a=\frac{x}{y} \quad v=y$

$\Longrightarrow$ $\{1\}$, $\{3\}$, $\{y\}$ con $y\in\mathbb{R}$, $y\neq 0$ sono tutti insiemi di generatori per $\mathbb{R}$.

$\{1\}$ genera $\mathbb{R}$ $\qquad$ $\{y\}$ genera $\mathbb{R}$.

$\{3\}$ genera $\mathbb{R}$ $\qquad$ con $y\neq 0$

**Oss:** $\{1\}$ genera $\mathbb{R}$ $\qquad x = x\cdot 1$

$\{1,0\}$ genera $\mathbb{R}$ $\qquad x = x\cdot 1 + 0\cdot 0$

$\{1,3\}$ genera $\mathbb{R}$ $\qquad \boxed{\begin{aligned} x &= x\cdot 1 + 0\cdot 3 \\ &= 0\cdot 1 + \frac{x}{3}\cdot 3 \end{aligned}}$

**Oss:** Se $\{v_1,\dots,v_n\}$ genera $V$ allora se $v_{n+1}\in V$ anche $\{v_1,\dots,v_n,v_{n+1}\}$ genera $V$.

**Proposizione:**

Sia $V$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $v_1,\dots,v_n$ vettori di $V$ e l'insieme delle loro combinazioni lineari

$$\langle v_1,\dots,v_n\rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i=1,\dots,n \right\}$$

- è sottospazio di $V$
- è il più piccolo sottospazio di $V$ che contiene $v_1,\dots,v_n$.

Viene detto **sottospazio generato** da $\{v_1,\dots,v_n\}$.

**Dim:**

① $0_V \in \langle v_1,\dots,v_n\rangle \qquad 0_V = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$

② Ch. per la somma

$$w_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad w_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$$

$$\begin{aligned} w_1+w_2 &= a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n + \\ &\quad + b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n \\ &= (a_1+b_1)v_1 + (a_2+b_2)v_2 + \dots + (a_n+b_n)v_n = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)v_i \in \langle v_1,\dots,v_n\rangle \end{aligned}$$

③ Ch. per pr. per scalari $\quad v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad c \in \mathbb{R}$

$$cv = c\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (ca_i)v_i \in \langle v_1,\dots,v_n\rangle$$

•• Se $W \leq V$ e $W$ contiene i vettori $v_1, \dots, v_n$

$W$ è chiuso per comb. lineari $\Longrightarrow$ $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq W$ $\square$

**Esercizi:**

Dimostrare che i seguenti insiemi sono sottospazi di $V$ e determinarne un insieme di generatori.

1) $V = \mathbb{R}^3$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; 2x - y + z = 0 \right\} \qquad y = 2x + z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ 2x+z \\ z \end{pmatrix} =$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x+z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x+z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ per la proposizione precedente $W \leq \mathbb{R}^3$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è insieme di generatori.

**Es:** $V = M_{2,3}(\mathbb{R})$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a_{11}+a_{12}+a_{13}=0 \\ a_{21}=0 \\ a_{23}=0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} a_{11} = -a_{12}-a_{13} \\ a_{21}=0 \\ a_{23}=0 \end{cases}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} -a_{12}-a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \end{pmatrix} \middle| a_{12}, a_{13}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -a_{12} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{13} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{12}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

**Osservazione:**

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle \leq \langle v_1, \dots, v_k, v_{k+1} \rangle$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + 0\, v_{k+1}$$

**Oss:**

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| 2x - y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| y = 2x \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x = \frac{y}{2} \right\}$$

$$x = \frac{y}{2} \qquad \begin{pmatrix} \frac{y}{2} \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \langle v \rangle = \langle 2v \rangle = \langle -v \rangle$$

$\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$ con $v_1$ e $v_2$ diversi da $0_V$

allora $v_1$ e $v_2$ sono multipli