Prodotto di matrici

$$\underset{m \times n}{A} \quad \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{AB}$$

$M_{n,n}(\mathbb{R})$ $\quad \mathbb{I}_n$ matrice identità

$$\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \\ & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

$$\underset{n \times \cancel{n}}{\mathbb{I}_n} \underset{\cancel{n} \times p}{B} \quad n \times p \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & & & b_{2p} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & b_{np} \end{pmatrix}$$

$1 \cdot b = b \qquad a \cdot 1 = a$

$$\underset{m \times \cancel{n}}{A} \underset{\cancel{n} \times n}{\mathbb{I}_n} = \underset{m \times n}{A} \qquad A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$M_{m,n}(\mathbb{R}) \times M_{n,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{m,p}(\mathbb{R})$$
$$(A, B) \longrightarrow AB$$

$$M_{n,n}(\mathbb{R}) \times M_{n,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$$
$$(A, B) \longrightarrow AB$$
$$(B, A) \longrightarrow BA$$

in generale $AB \neq BA$ prodotto non commutativo

Quando il prodotto si può fare

In generale $AB \neq BA$ prodotto non commutativo

Quando il prodotto si può fare

$$A(B_1+B_2) = AB_1 + AB_2$$

$$(A_1+A_2)B = A_1B + A_2B$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$m\times n \quad n\times p \quad p\times q$

$\mathbb{I}_n$ è elemento neutro

Def: $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dice invertibile se esiste una matrice $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che

$$AB = \mathbb{I}_n$$

$$BA = \mathbb{I}_n$$

B viene detta inversa di A $\quad B = A^{-1}$

Def: $GL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ è invertibile} \}$

Gruppo Lineare

Esempi:

$GL_1(\mathbb{R}) = \{ (a) \mid a \neq 0 \}$ $\quad (a)(a^{-1}) = (1)$

$$GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} a,b,c,d \in \mathbb{R} \\ ad-bc \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$\boxed{A^{-1} = (ad-bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

$\alpha(AB) =$
$= (\alpha A)B = A(\alpha B)$

$$A^{-1}A = \frac{1}{ad-bc} \boxed{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & db-bd \\ -ca+ac & -bc+ad \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\boxed{\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$

Se $ad-bc=0$ $\boxed{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{C} \cdot A = \mathbb{O}$ Se A fosse invert.

$(C\cancel{A})\cancel{A^{-1}} = \mathbb{O}A^{-1} \Rightarrow C = \mathbb{O}$

Es: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $ad-bc=0$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ non è invertibile

Proposizione: siano $S, C \in GL_n(\mathbb{R})$ cioè invertibili

$$(SC)^{-1} = C^{-1}S^{-1}$$

Dim:

$$(C^{-1}S^{-1})(SC) = C^{-1}(S^{-1}S)C = C^{-1}\mathbb{I}_nC =$$
$$= C^{-1}C = \mathbb{I}_n$$

$= C^{-1}C = \mathbb{I}_n$

$$(SC)(C^{-1}S^{-1}) = \mathbb{I}_n.$$

Definizione: le seguenti matrici sono dette **matrici elementari** (ottenute applicando le operazioni elementari sulle righe alla matrice $\mathbb{I}_n$)

① $S_{i,j}$ scambio la riga i-esima con la j-esima a partire da $\mathbb{I}_n$

Es: $\mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $S_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $S_{ij} S_{ij} = \mathbb{I}_n$

$$S_{1,3} S_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

② $M_i(a)$ $a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ moltiplico la riga i-esima per a

Es: $\mathbb{I}_3$ $M_3(-5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

$M_i(a)\, M_i(a^{-1}) = \mathbb{I}_n$

③ $H_{i,j}(a)$ $i \neq j$ somma alla riga i-esima la riga j esima moltiplicata per $a \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $H_{1,3}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $1°R - 2\,3°R$

$$H_{1,3}(-2) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{H_{1,3}(-2)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{H_{1,3}(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_3$$

Nota bene:

Nota bene:

$$S_{1,3}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

Per esercizio calcolare AS_{13}.

Fatto: $S_{i,j}A$ corrisponde ad aver fatto l'operazione elementare $S_{i,j}$ direttamente sulla matrice A.

$a \neq 0$ $\quad M_i(a)A$ è la matrice ottenuta da A con l'op. el. $M_i(a)$

$H_{i,j}(a)A$ " " " " " A con l'op. el $H_{i,j}(a)$

Prop: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ di rango n (ovvero che una sua ridotta a scala ha n pivot) allora A è invertibile e A^{-1} è prodotto di matrici elementari.

Dim:

Riduciamo A in forma a scala

$$E_K \cdots E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = B$$

con $b_{11} \cdots b_{nn} \neq 0$ per ipotesi.

Continuare a ridurre per righe la matrice B fino ad ottenere la matrice identità.

$$E_K \cdots E_1 A = B \qquad E_{K+1} E_K \cdots E_1 A = E_{K+1} B$$

$$(E_m \cdots E_{K+1} E_K \cdots E_1) A = \mathbb{I}_n$$

$$A^{-1} = E_m \cdots E_1. \qquad \square.$$

$b_{11} \cdots b_{nn} \neq 0$

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} \cdots & b_{2n} \\ 0 & \cdots & 0 \; b_{nn} \end{pmatrix} = B \rightsquigarrow I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_k \cdots E_1 A = B \qquad E = E_k \cdots E_1 \qquad EA = B$

$$B \rightsquigarrow C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{2n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & 1 \end{pmatrix}. \qquad 1^\circ R - c_{1n}\, n^\circ R \quad \begin{pmatrix} 1 & c_{12} \cdots & c_{1n-1} & 0 \\ 0 & 1 \cdots & & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \quad e$$

continuo a ridurre con Gauss eliminando i coefficienti $c_{2n}, \ldots, c_{n-1n}$ poi passo alla colonna $n-1$ e continuo a ridurre fino ad ottenere I_n.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{3,3}(\mathbb{R}) \qquad A \rightsquigarrow I_3$$

$$A^{-1} A = I_3$$

$$E_k \cdots E_1 A = B$$

$$(A \mid I_3) \rightsquigarrow \left(\begin{matrix} b_{11} \cdots & b_{1n} \\ 0 \ddots & \\ 0 & b_{nn} \end{matrix} \middle| \; E_k \cdots E_1 \right)$$

$$\left(\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right) \longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right)$$

M (1) S... M (1) S

$$M_1(-1)S_{13} \qquad\qquad M_1(-1)S_{13}$$

$2°R - 2\cdot 1°R$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Scambio 2°R con 3°R

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{3} & 3 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad 3°R - 3\cdot 2°R \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$B \qquad E_k \cdots E_1$$

"Mettere tutti coeff. 1 sulle diagonali $M_i(a)$ $a \neq 0$)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right) \quad 1°+3° \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

$$(\mathbb{I}_3 \mid A^{-1})$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3+1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oss:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

Def: una matrice $D \in M_n(\mathbb{R})$ si dice diagonale se $D = (d_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1 \le j \le n}}$ $\quad d_{ij} = 0 \ \forall\, i \neq j$.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix} \qquad d_{11}, d_{22} \in \mathbb{R}.$$

Es: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

Matrici scalari:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{pmatrix} = a I_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 3b & 4b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 3a & 4b \end{pmatrix}$$

Definizione: data $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si dice **trasposta di A** la matrice

$${}^tA = A^t \in M_{n,m}(\mathbb{R}) \qquad (A^t)_{ij} = A_{ji}$$

Es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}) \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$(A^t)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$(A+B)^t = A^t + B^t$

$(aA)^t = a A^t$

$(A^t)^t = A$

$(AB)^t = B^t A^t$

$(A^t)^t = A$

$(AC)^t = C^t A^t$

$\underset{m\times n}{A} \quad \underset{n\times p}{C} \qquad \underset{m\times p}{AC}$

$\underset{p\times \underline{n}}{C^t} \quad \underset{\underline{n}\times m}{A^t} \quad \underset{p\times m}{(AC)^t} \quad \underset{p\times m}{C^tA^t}$

Sottospazi vettoriali

Def: dato V un K-spazio vettoriale, un sottoinsieme $W \subseteq V$ $\boxed{W \neq \emptyset}$ si dice **sottospazio vettoriale** di V se:

① **chiuso rispetto alla somma**

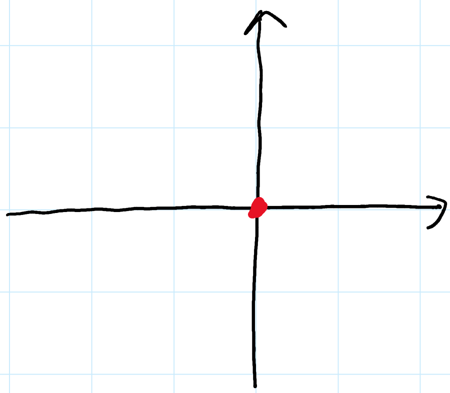
$\forall\, w_1, w_2 \in W \quad w_1 + w_2 \in W$

② **chiuso per prodotto per scalari**

$\forall a \in K \ \forall w \in W \quad aw \in W$

$$W \leq V$$

Esempi e controesempi in $\mathbb{R}^2$:

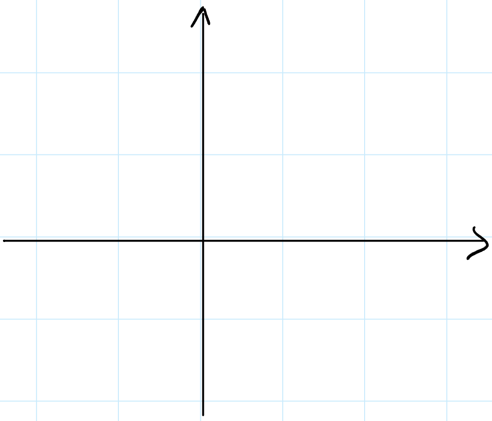


$V = \mathbb{R}^2 \quad \longmapsto \quad 0_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$W = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \right\} \leq V$

$a\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ch. per pr. per scalari

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ch. per la somma



$W = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\}$ Non è sott.

$3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ non è chiuso per prodotto per scalare

$W = \left\{ \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$ $\quad \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in W$

ch. somma $\begin{pmatrix}a_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1+a_2\\0\end{pmatrix} \in W$

ch. . . $\quad b\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ab\\0\end{pmatrix} \in W$