Spazi vettoriali

$K = \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}$ dimensione n

$M_{m,n}(\mathbb{R}) = \{ A \mid A$ matrice m righe n colonne con coefficienti reali $\}$

Matrici quadrate $M_{n,n}(\mathbb{R})$

Es: $M_{2,2}(\mathbb{R})$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Polinomi:

$\mathbb{R}_{\leq d}[x] = \mathbb{R}^{\leq d}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 0, \dots, d \right\}$

$d = 2$ $\quad \underbrace{ax^2 + bx}+c \quad a, b, c \in \mathbb{R}$ $\quad$ dimensione 3

d $\quad a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$\underbrace{a_d \quad a_{d-1} \quad \dots \quad a_1}_{d} \quad \underbrace{a_0}_{1} \quad d+1$

$\mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{ ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ $\quad$ è biiettiva

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longrightarrow ax^2 + bx + c$

$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ $\quad (x^2 + 1) + (3x^2 - 2x + 2) =$

$= 4x^2 - 2x + 3 \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x^2 + 1 = x^2 + 0 \cdot x + 1$

$3x^2 - 2x + 2$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$M_{2,2}(\mathbb{R}) \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$a(bv) = (ab)v$

$a(v+w) = av + aw$

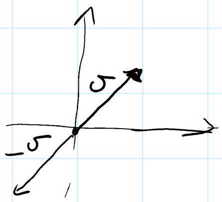
$(a+b)v = av + bv$

$1 \cdot v = v$

Proprietà degli spazi vettoriali

Sia V un K-spazio vettoriale, allora $\forall v \in V$ e $\forall a \in K$ si ha:

1. $0 \cdot v = 0_V$
2. $a \cdot 0_V = 0_V$
3. $(-1) \cdot v = -v \qquad -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
4. $a v = 0_V \iff a = 0$ oppure $v = 0_V$.



DIM: di (4) usando (1), (2) e (3):

"$\Leftarrow$" Ipotesi: $a = 0$ oppure $v = 0_V$

Tesi: $av = 0_V$

Se $a=0$ $\; av = 0 \cdot v = 0_V$ per la pr. (1)

Se $v = 0_V$ $\; av = a \cdot 0_V = 0_V$ per la pr. (2)

"$\Rightarrow$" Ipotesi: $av = 0_V$

Tesi: $a = 0$ oppure $v = 0_V$

Sia $\boxed{av = 0_V}$ se $a = 0$ la tesi è verificata

se $a \neq 0$ allora esiste $a^{-1} \in K$ tale che $a^{-1} \cdot a = 1$

$$= a^{-1}(av) = a^{-1} 0_V \overset{\text{per } (2)}{=} 0_V \qquad \Rightarrow v = 0_V$$

$$= (a^{-1}a)v = 1 \cdot v = v$$

$\square$

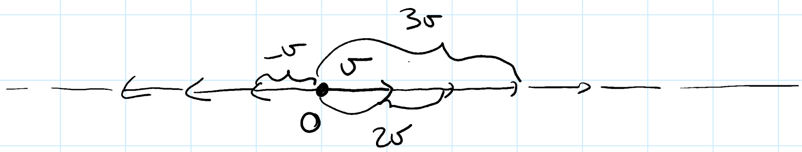
Oss:

1) $V = \{0\}$ $\quad a0 = 0$ $\quad \dim V = 0$

$\quad 0 + 0 = 0$

---

2) Supponiamo che V sia uno spazio vettoriale che contiene $v \in V$ $\quad v \neq 0_V$



$\{av \mid a \in K\} \subseteq V$ $\qquad av = bv$

$\qquad av - bv = 0_V$

$\qquad (a-b)v = 0_V$

ma $v \neq 0_V \implies a - b = 0 \Rightarrow a = b$

Se $K = \mathbb{R}$ $\quad \{av \mid a \in K\}$ ha cardinalità infinita

---

Matrici a scala

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rg A = 2 \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad rg B = 3$$

Definizione: una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si dice a **scala** (oppure a scalini) se valgono le condizioni:

Ⓐ le righe nulle (se ci sono) sono le ultime.

Ⓑ Nelle righe non nulle il primo (da sx) elemento non nullo, detto **pivot**, compare più a destra del pivot della riga precedente.

Esempio:

① $\mathbb{O}_{M_{2,3}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è a scala $\quad rg\, \mathbb{O} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad rg\,A = 2$$

Oss: Se A è matrice a scala il numero di pivot è detto rango di A $\quad rg(A) = rk(A)$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(C) = 1 \qquad rg(C') = 1$

Osservazione: Se A è a scala $\quad A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$M_{2,3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg(A) \leq m$$

$rg\,A = 2 \qquad rg(A) \leq n$

$${}^tA = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice Trasposta

$rg\,A^t = 2$

Esempio:

3 eq. in 3 inc. x, y, z

$$\Sigma: \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0x + y + z = 0 \\ 0x + 0y + z = 0 \end{cases} \uparrow \quad \begin{cases} 2x + 0 - 3 \cdot 0 = 0 \\ y + 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - 5z = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) = A$$

Scambio 1-2 $\quad S_{1,2}$

$$\begin{array}{r} \\ 2-2\cdot 1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$2°$ riga $- 2 \cdot 1°$ riga

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$S_{2,3} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$3°$ riga $+ 2 \cdot 2°$ riga

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 \\ -2+2 \\ -3-10 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} 3°R \\ 2°R \\ 1°R \end{array} \begin{cases} -13z = 0 \\ y - 5z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Definizione: sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si chiamano **operazioni elementari** sulle righe di A le seguenti operazioni:

1. $M_i(a)$ moltiplicare la riga i-esima di A per il coefficiente $a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$
2. $H_{i,j}(b)$ sommare alla riga i-esima la riga j-esima moltiplicata per $b \in \mathbb{R}$ $i \neq j$

   $H_{1,2}(-1)$
3. S_{ij} scambio la riga i-esima con la riga j-esima

Metodo di eliminazione (o riduzione) di Gauss

Ogni matrice $A \in M_{m,n}(K)$ può essere ridotta in forma a scala usando operazioni elementari sulle righe di A.

Dim:

Sia $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

Se $A = 0$ allora è a scala

Se $A \neq 0$ esistono i,j $a_{ij} \neq 0$

Passo 1: determinare la prima colonna non nulla individuare un elemento non nullo (il più "semplice") con uno scambio portarlo in prima riga

Passo 2: con operazioni $H_{i,1}(b)$ eliminare tutti gli altri elementi della colonna.

Tenere la prima riga fissa e ripetere i passi 1 e 2 sulla matrice ottenuta cancellando la prima riga.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_{1,3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{M_1(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{4,1}(2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$S_{2,3}$

scambio 2° con 3°

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[4^\circ - 2^\circ \text{ riga}]{H_{4,2}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$S_{3,4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$