Insiemi di numeri

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ naturali

$\underline{2}+\underline{3}=5$ $\quad 2\cdot 3=6$

$m, n \in \mathbb{N}$ $\quad m+n \in \mathbb{N}$

appartiene

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{N}\}$ prodotto cartesiano

tale che

$f: X \longrightarrow Y$ f funzione X dominio Y codominio

Usiamo come $f=+$ $\quad X=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $\quad Y=\mathbb{N}$

$$+ : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(m,n) \longmapsto m+n$$

addizione o somma

$$\cdot : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

prodotto

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2 \dots\}$ numeri interi

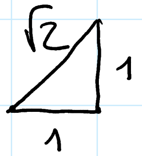
$\mathbb{Q}$ numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \quad \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \iff mn' = m'n \right\}$$

$n' \neq 0$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

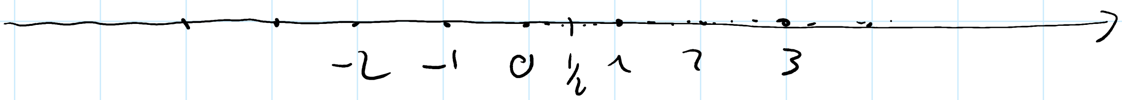
$\iff$ se e solo se



$\mathbb{R}$ $\quad 0 \quad \sqrt{2} \quad \pi \quad e$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

incluso



$$x^2 + 1 = 0 \qquad \boxed{x^2 = -1} \qquad x^2 = -2 \qquad x^2 = -4$$

$i \qquad i^2 = ii = -1$ unità immaginaria

Operazioni addizione moltiplicazione

$+ \qquad \cdot$

$+$ $\cdot$

Pr. commutativa $\quad x+y=y+x \quad\quad xy=yx$

Pr associativa $\quad (x+y)+z= x+(y+z) \quad\quad (xy)z= x(yz)$

Pr distributiva $\quad x(y+z) = xy + xz$

$2(1+3) = 2\cdot 1 + 2\cdot 3$

Esistenza dell'elemento neutro per la somma 0

$2+0=2 \quad\quad x+0=0+x=x$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$\forall$ per ogni

Esistenza dell'elemento neutro per il prodotto 1

$x\cdot 1 = 1\cdot x = x \quad\quad \forall x \in \mathbb{R}$

Def: dato $x\in\mathbb{R}$ si dice opposto di x un elemento $y\in\mathbb{R}$ tale che $x+y=0$ si indica con $-x$.

Def dato $x\in\mathbb{R}$ $x\neq 0$ si dice inverso di x un elemento $y\in\mathbb{R}$ tale che $x\cdot y=1$

$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$

Es: $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1.$

Osservazione:

In $\mathbb{N}$ quali numeri hanno un opposto? 0

In $\mathbb{Z}$ " " " " " ? Tutti

In $\mathbb{N}$ quali numeri non nulli hanno un inverso? 1

In $\mathbb{Z}$ " " " " " " " ? 1 e -1

Definizione:

Un campo è un insieme K dotato di due operazioni $+$ $\cdot$ tali che

$+$ e $\cdot$ sono commutative, associative, pr. distr.

c'è 0, 1.

Ogni $x \in K$ ha un opposto $-x \in K$

Ogni $x \in K$ $x \neq 0$ ha un inverso $\frac{1}{x} \in K$.

Esempi:

$\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

$\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \{0, 1\}$

$0+0=0$

$0+1=1+0=1$

$1+1=0$

$0 \cdot 0 = 0$ $0 \cdot 1 = 0$ $1 \cdot 1 = 1$

$\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} = \{0, 1, 2\}$ $2+1=3=0$

$\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ $2 \cdot 2 = 4 = 0$

$$\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \qquad 2 \cdot 2 = 4 = 0$$

$$xy = 0$$

In ogni campo

$$xy = 0 \iff x = 0 \text{ oppure } y = 0$$

(o entrambi)

Numeri complessi

$i \qquad i^2 = -1 \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

$z = a + ib \qquad Re(z) = a$ parte reale

$Im(z) = b$ parte immaginaria

$z = \boxed{2 - 3i} = 2 + i(-3) \qquad Re(z) = 2$

$Im(z) = -3$

$$(1 + 5i) + (-2 + 2i) = -1 + 7i$$

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

Oss: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad x + i \cdot 0$

$2+3i \qquad 3+2i$

Opposti

$-(2+5i) = -2-5i$

$2+5i-2-5i=0$

$$\boxed{i^2=-1}$$

Prodotto

$(3-i)(2+2i) = 3\cdot 2 + 3\cdot 2i - i\cdot 2 - i\cdot 2i =$

$= 6+6i-2i-2\underbrace{i^2}_{-1} = 6+4i+2 = 8+4i$

$(a+ib)(a'+ib') = aa'-bb' + i(a'b+ab')$

Inversi

$z=2+i$

$\frac{1}{2+i}\cdot 1 = \frac{1}{2+i}\,\frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} =$

$= \frac{2-i}{4-\cancel{2i}+\cancel{2i}-\underbrace{i^2}_{-1}} = \frac{2-i}{4+1} = \qquad (x-y)(x+y)$

$= \frac{2-i}{5} = \frac{1}{5}(2-i) = \frac{2}{5}+i\left(-\frac{1}{5}\right)$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \qquad z_2 \neq 0$$

Es: determinare gli inversi di

$1+i \qquad 3-i \qquad -1+4i$