



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



Dipartimento
di Ingegneria Industriale

La teoria della similitudine

Corso di Macchine 1

Agenda

- ▶ La teoria della Similitudine
- ▶ Similitudine meccanica
- ▶ Influenza del numero Reynolds
- ▶ Leggi di Affinità
- ▶ Leggi di Affinità semplificate – Note Integrative



Teoria delle Similitudine

Teoria della similitudine

La teoria della similitudine nasce come risposta ad una serie di esigenze:

- ▶ Come faccio a **scegliere** il tipo di macchina adatto a soddisfare i dati di progetto?
Per esperienza?
- ▶ Come stabilisco le **dimensioni principali** di una macchina? Per tentativi, per esperienza?
- ▶ Come posso **prevedere** il comportamento di un prototipo partendo dal modello?
O come posso prevedere il comportamento di una macchina in diverse condizioni operative?



Teoria della similitudine

Le applicazioni della teoria della similitudine meccanica sono numerose, tra cui:

- ▶ **scegliere** la macchina che meglio si addice a soddisfare prescritte condizioni operative
- ▶ **classificare** le macchine in gruppi a seconda delle loro caratteristiche geometriche e funzionali
- ▶ rielaborare i risultati sperimentali ottenuti con una macchina per **prevedere** il comportamento della stessa macchina in differenti condizioni di funzionamento, o di un'altra macchina a quella geometricamente simile
- ▶ riassumere in modo razionale l'**esperienza** acquisita per facilitare la **progettazione** di una nuova macchina



Teoria della similitudine

- Le **prestazioni** di una macchina sono strettamente **correlate** con il moto del fluido e quindi per relazionare tra loro due o più macchine bisogna mettere in relazione il **moto del fluido** al loro interno
- Le variabili che descrivono il **moto di un fluido** si possono suddividere in **tre gruppi**:

- GEOMETRICHE: tutte le dimensioni

D girante $(l_1, l_2, \dots)$ organi statorici

- CINEMATICHE:

Q_v, ω

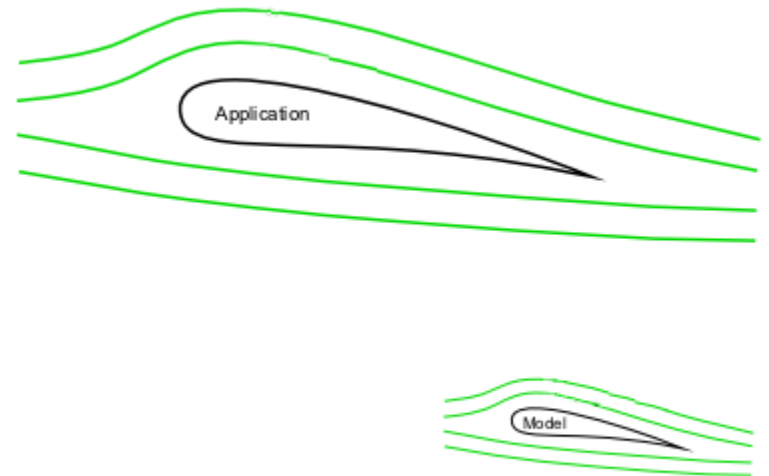
- DINAMICHE:

- Proprietà del fluido: ρ, μ
- Prestazioni della macchina: gh, P_{alb}



Teoria della similitudine

- Per verificare l'esistenza o meno di particolari relazioni tra macchine diverse si dovranno confrontare le tre tipologie di variabili o meglio si dovrà verificare l'esistenza di similitudini tra le macchine stesse
- In particolare si dovranno determinare le condizioni per avere:
 - similitudine GEOMETRICA
 - similitudine CINEMATICA
 - similitudine DINAMICA



Teoria della similitudine

- Se quelle elencate sono **tutte le variabili che regolano il moto** di una corrente incompressibile attraverso una turbomacchina, allora, e in tutta generalità, è possibile esprimere la loro **interdipendenza** per il tramite di **una relazione funzionale** del tipo:

$$F\left(\underset{\substack{1 \\ D}}{\underbrace{(l_1, l_2, \dots)}_2}, \underset{3}{Q_v}, \underset{4}{\omega}, \underset{5}{\rho}, \underset{6}{\mu}, \underset{7}{gh}, \underset{8}{P_{alb}}\right) = 0$$

ci sono **8** variabili e **3** dimensioni principali: **M, L, T** (massa, lunghezza, tempo)

- Per il **π -theorem** di Buckingham è possibile semplificare la precedente relazione funzionale **F** con soli **$n - m = 8 - 3 = 5$** **gruppi adimensionali** tra loro indipendenti, ottenendo:

$$F'(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) = 0$$

CRITERIO per definire i gruppi: prendere $m=3$ variabili, una per ciascuna classe, e di combinarle con le rimanenti $n - m = 5$



Similitudine Meccanica

Similitudine Meccanica – analisi dimensionale

- Nella scelta si vuole che:
 - le variabili che caratterizzano le prestazioni della macchina (gh, P_{alb}, Q_v) entrino ciascuna in un **gruppo adimensionale**
 - ⇒ possibilità di **esplicitare** il gruppo che contiene la variabile che più interessa
 - le variabili che esprimono **proprietà del fluido** entrino in più gruppi
 - ⇒ possibilità di **ignorare un gruppo** se la proprietà corrispondente ha un'influenza **trascurabile**

- Per i fluidi incompressibile le variabili vengono quindi scelte tra le varie classi in questo modo:
 - ρ : la **densità**, fra le variabili dinamiche
 - ω : **velocità angolare**, fra quelle cinematiche
 - D : **diametro girante**, fra quelle geometriche



Similitudine Meccanica – analisi dimensionale

- Scelte quindi le seguenti variabili di partenza:

- ρ : la **densità**, fra le variabili dinamiche
- ω : **velocità angolare**, fra quelle cinematiche
- D : **diametro girante**, fra quelle geometriche

$$F(D, l_i, Q_v, \omega, \rho, \mu, gh, P_{alb}) = 0$$



$$F'(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) = 0$$

Si devono definire i relativi gruppi adimensionali:


$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = \rho^{a_1} \omega^{b_1} D^{c_1} \cdot gh \\ \pi_2 = \rho^{a_2} \omega^{b_2} D^{c_2} \cdot P_{alb} \\ \pi_3 = \rho^{a_3} \omega^{b_3} D^{c_3} \cdot Q_v \\ \pi_4 = \rho^{a_4} \omega^{b_4} D^{c_4} \cdot \mu \\ \pi_5 = \rho^{a_5} \omega^{b_5} D^{c_5} \cdot l_i \end{array} \right.$$

- I coefficienti a_i, b_i, c_i di ciascun gruppo π_i si determinano **imponendo la condizione di adimensionalità**. Così, ad esempio, per il gruppo π_1 :

$$[\pi_1] = [M L^{-3}]^{a_1} [T^{-1}]^{b_1} [L]^{c_1} [L^2 T^{-2}] = [L^0 M^0 T^0]$$



Similitudine Meccanica – analisi dimensionale

$$[\pi_1] = [M L^{-3}]^{a_1} [T^{-1}]^{b_1} [L]^{c_1} [L^2 T^{-2}] = [L^0 M^0 T^0]$$

da cui:

$$\begin{array}{l} \text{L:} \\ \text{M:} \\ \text{T:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -3a_1 + c_1 + 2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ -b_1 - 2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ b_1 = -2 \\ c_1 = -2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{gh}{\omega^2 D^2}$$

- Procedendo in modo analogo per gli altri si perviene alla fine ai seguenti gruppi adimensionali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = \frac{gh}{\omega^2 D^2} \\ \pi_2 = \frac{P_{alb}}{\rho \omega^3 D^5} \\ \pi_3 = \frac{Q_v}{\omega D^3} \\ \pi_4 = \frac{\rho \omega D^2}{\mu} \\ \pi_5 = \left(\frac{l_1}{D}, \frac{l_2}{D}, \dots \right) \end{array} \right.$$

Il significato dei gruppi adimensionali

- I gruppi adimensionali individuati hanno associato un **significato** che li correla alle caratteristiche geometriche e al comportamento cinematico e dinamico di una macchina

$$\pi_1 = \frac{gh}{\omega^2 D^2} \quad \pi_2 = \frac{P_{alb}}{\rho \omega^3 D^5} \quad \pi_3 = \frac{Q_v}{\omega D^3} \quad \pi_4 = \frac{\rho \omega D^2}{\mu} \quad \pi_5 = \left(\frac{l_1}{D}, \frac{l_2}{D}, \dots \right)$$

NUMERO DI FORMA N_f

$$\pi_5 = N_f = \left(\frac{l_1}{D}, \frac{l_2}{D}, \dots \right) \quad \text{esprime la SIMILITUDINE GEOMETRICA}$$

Il significato dei gruppi adimensionali

$$\pi_1 = \frac{gh}{\omega^2 D^2} \quad \pi_2 = \frac{P_{alb}}{\rho \omega^3 D^5} \quad \pi_3 = \frac{Q_v}{\omega D^3} \quad \pi_4 = \frac{\rho \omega D^2}{\mu} \quad N_f = \left(\frac{l_1}{D}, \frac{l_2}{D}, \dots \right)$$

NUMERO DI FLUSSO FUNZIONALE φ_D

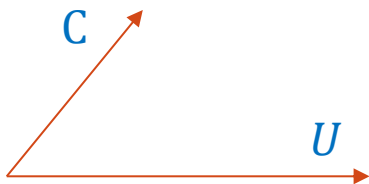
$$\pi_3 = \varphi_D = \frac{Q_v}{\omega D^3}$$

è un **coefficiente di portata** o di flusso

CHE SIMILITUDINE ESPRIME?

- Il gruppo adimensionale π_3 può perciò essere riformulato come segue:

$$\varphi_D = \frac{Q_v}{\omega D^3} = \frac{Q_v}{D^2} \frac{1}{\omega D} \propto \frac{C}{\omega D} \propto \frac{C}{U}$$



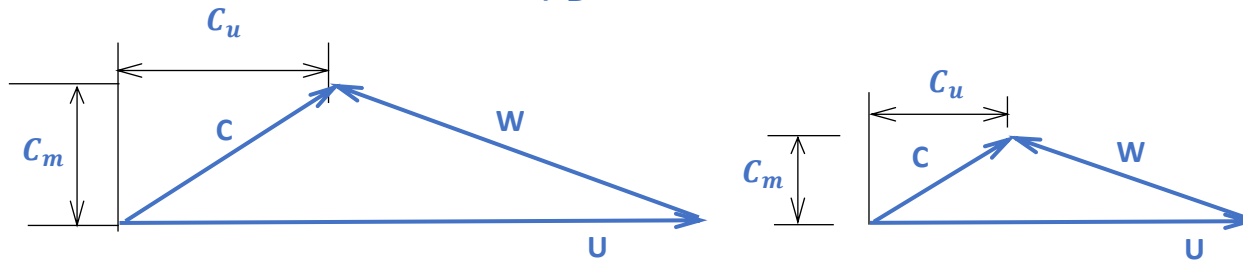
Implica una particolare relazione tra le velocità e quindi un **triangolo** delle velocità

Similitudine Meccanica – analisi dimensionale

NUMERO DI FLUSSO FUNZIONALE φ_D

$$\varphi_D = \frac{Q_v}{\omega D^3} \propto \frac{C}{U}$$

- Due macchine che hanno lo stesso φ_D hanno i triangoli delle velocità simili



➡ esprime la similitudine CINEMATICA

- Era già stato definito in passato un rapporto tra le velocità come numero di flusso φ :

$$\varphi = \frac{C_{m2}}{U_2}$$

- Tale rapporto è uno dei possibili rapporti tra velocità della similitudine cinematica ed è quindi legato a φ_D da un rapporto di proporzionalità:

$$\varphi = \frac{C_{m2}}{U_2} \propto \varphi_D$$

Il significato dei gruppi adimensionali

$$\pi_1 = \frac{gh}{\omega^2 D^2} \quad \pi_2 = \frac{P_{alb}}{\rho \omega^3 D^5} \quad \varphi_D = \frac{Q_v}{\omega D^3} \quad \pi_4 = \frac{\rho \omega D^2}{\mu} \quad N_f = \left(\frac{l_1}{D}, \frac{l_2}{D}, \dots \right)$$

NUMERO DI EULERO o DI PRESSIONE FUNZIONALE ψ_D

$$\pi_1 = \psi_D = \frac{gh}{\omega^2 D^2}$$

- Lo scambio energetico gh è una variazione di pressione totale Δp^0 ed in particolare ad una variazione di pressione Δp
- Si può dimostrare che ψ_D è legato ad un rapporto tra:

$$\psi_D = \frac{gh}{\omega^2 D^2} \propto \frac{\text{forze di pressione}}{\text{forze di inerzia}}$$

- Esprime quindi la **similitudine DINAMICA**
- Nella pratica tecnica è consuetudine utilizzare un gruppo adimensionale derivato da ψ_D :

$$\psi_D = \frac{gh}{\omega^2 D^2} \propto \frac{gh}{U^2} = \psi$$

NUMERO DI PRESSIONE



Il significato dei gruppi adimensionali

$$\psi_D = \frac{gh}{\omega^2 D^2}$$

$$\pi_2 = \frac{P_{alb}}{\rho \omega^3 D^5}$$

$$\varphi_D = \frac{Q_v}{\omega D^3}$$

$$\pi_4 = \frac{\rho \omega D^2}{\mu}$$

$$N_f = \left(\frac{l_1}{D}, \frac{l_2}{D}, \dots \right)$$

NUMERO DI REYNOLDS Re_D

$$\pi_4 = \frac{\rho \omega D^2}{\mu} \propto \frac{\rho U D}{\mu} = Re$$

- Si può dimostrare che Re_D è legato ad un rapporto tra:

$$Re_D = \frac{\rho \omega D^2}{\mu} \propto \frac{\text{forze di inerzia}}{\text{forze viscosse}}$$

- Esprime quindi anch'esso la **similitudine DINAMICA**

Il significato dei gruppi adimensionali

$$\psi_D = \frac{gh}{\omega^2 D^2}$$

$$\pi_2 = \frac{P_{alb}}{\rho \omega^3 D^5}$$

$$\varphi_D = \frac{Q_v}{\omega D^3} \quad Re_D = \frac{\rho \omega D^2}{\mu} \quad N_f = \left(\frac{l_1}{D}, \frac{l_2}{D}, \dots \right)$$

NUMERO DI POTENZA Π_D

$$\pi_2 = \Pi_D = \frac{P_{alb}}{\rho \omega^3 D^5}$$

- Tale gruppo è, a meno del rendimento η , legato alla potenza idraulica e, quindi, al prodotto dei numeri di flusso ϕ e di pressione ψ :

$$\pi_2 = \Pi_D = \frac{P_{alb}}{\rho \omega^3 D^5} = \frac{\rho Q_v g h}{\rho \omega^3 D^5 \eta} = \frac{Q_v}{\omega D^3 \eta} \frac{g h}{\omega^2 D^2} = \frac{\varphi_D}{\eta} \psi_D \propto \frac{\varphi}{\eta} \psi$$

(per macchine operatrici)

- Esprime quindi anch'esso la **similitudine DINAMICA**



La similitudine meccanica

$$\psi_D = \frac{gh}{\omega^2 D^2} \quad \Pi_D = \frac{P_{alb}}{\rho \omega^3 D^5} \quad \varphi_D = \frac{Q_v}{\omega D^3} \quad Re_D = \frac{\rho \omega D^2}{\mu} \quad N_f = \left(\frac{l_1}{D}, \frac{l_2}{D}, \dots \right)$$

- La **similitudine meccanica** tra due macchine si verifica quando sono soddisfatte le seguenti condizioni:
 - similitudine geometrica** delle macchine, riassunta dal numero di forma N_f
 - similitudine cinematica**, data dalla similitudine geometrica dei triangoli delle velocità in punti omologhi delle macchine a confronto, è riassunta dal numero di flusso φ_D
 - similitudine dinamica**, data dalla costanza dei rapporti fra le differenti forze presenti in punti omologhi delle macchine a confronto, è riassunta dai numeri di pressione ψ_D , di Reynolds Re e di potenza Π
- Queste tre condizioni assicurano la **similitudine geometrica** delle linee di corrente, a cui è associato l'equilibrio tra le forze di pressione e le forze centrifughe



Un comportamento complessivo delle macchine
in perfetta similitudine

La similitudine meccanica

$$\psi_D = \frac{gh}{\omega^2 D^2} \quad \Pi_D = \frac{P_{alb}}{\rho \omega^3 D^5} \quad \varphi_D = \frac{Q_v}{\omega D^3} \quad Re_D = \frac{\rho \omega D^2}{\mu} \quad N_f = \left(\frac{l_1}{D}, \frac{l_2}{D}, \dots \right)$$

Per verificare la similitudine di due macchine, deve essere verificata l'uguaglianza di tutti e 5 i numeri adimensionali?

- È noto che i quattro parametri operativi di una turbomacchina non sono indipendenti tra di loro:

$$P_{alb} \quad gh \quad Q_v \quad \omega$$

- Infatti, una volta fissate ω e Q_v , la potenza P_{alb} , e lo scambio di energia gh sono immediatamente e univocamente determinati



E' sufficiente verificare l'uguaglianza di N_f, φ_D, Re_D perché sia verificata anche quella dei numeri di pressione ψ_D e di potenza Π_D

$$\psi_D, \Pi_D = f(N_f, \varphi_D, Re_D)$$

$$\psi, \Pi = f(N_f, \varphi, Re)$$



Influenza del numero di Reynolds

Influenza del numero di Reynolds

- La similitudine meccanica richiede che sia assolta anche la **similitudine** del numero di **Reynolds**, più difficile da verificare perché richiede la conoscenza del **comportamento viscoso** del fluido

$$\psi = f(N_f, \varphi, Re)$$

Ci sono poi casi in cui a priori è impossibile assolverla: ad esempio per una data macchina (operante con lo stesso fluido) al **variare** del regime di **rotazione** poiché $Re = \frac{\rho \omega D^2}{\mu}$

- Se l'influenza di **Re** fosse **trascurabile**, sarebbe sufficiente la verifica della similitudine geometrica e cinematica per dimostrare la similitudine del numero di pressione ψ

$$\psi = f(N_f, \varphi, \cancel{Re}) = f(N_f, \varphi)$$

Trascurare l'influenza di Reynolds significa trascurare le **forze viscosi** e quindi considerare il fluido è aviscoso → Sono **nulle le perdite idrauliche** gh_r all'interno della macchina

$$\Rightarrow gh_t = gh + \cancel{gh_r}$$

Influenza del numero di Reynolds

Esiste una condizione in cui è possibile effettivamente trascurare l'influenza del Numero di Reynolds??

$$\psi = f(N_f, \varphi, Re) \quad ?$$

- Hp: si consideri verificata la **similitudine geometrica** N_f e la **similitudine cinematica** φ tra due macchine
- In queste ipotesi è possibile dimostrare che le due macchine avranno gli stessi numeri di pressione ψ_t :

MACCHINA OPERATRICE

$$\psi_t = \frac{gh_t}{U_2^2} = \frac{U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}}{U_2^2} = \frac{C_{u2}}{U_2} - \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 \frac{C_{u1}}{U_1} = \frac{C_{u2}}{U_2} - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \frac{C_{u1}}{U_1}$$

$\psi_t = f(N_f, \varphi)$ stessi numeri di pressione ψ_t ← **similitudine geometrica** **similitudine cinematica**

Influenza del numero di Reynolds

- Se il fluido è reale, la relazione tra il numero di pressione ψ ed il numero di pressione teorico ψ_t è data da:

$$\psi = \frac{gh}{U_2^2} = \frac{\eta_{id} \cdot gh_t}{U_2^2} = \eta_{id} \psi_t \quad \text{MACCHINA OPERATRICE}$$



Per avere anche lo stesso numero di pressione, si deve verificare che le due macchine abbiano anche lo stesso η_{id}

- La definizione di rendimento idraulico può essere manipolata nel modo seguente:

$$\eta_{id} = \frac{gh}{gh_t} = \frac{gh_t - gh_r}{gh_t} = 1 - \frac{gh_r}{gh_t} = 1 - \frac{f \frac{L}{D} \frac{C^2}{2}}{gh_t} = 1 - \frac{f \frac{L}{D} \frac{C^2}{2}}{\psi_t U_2^2} \quad \text{MACCHINA OPERATRICE}$$

dove gh_r è la perdita di energia per unità di massa

Influenza del numero di Reynolds

$$\psi_t = \frac{gh_t}{U_2^2} = f(N_f, \varphi)$$

$$\psi = \frac{gh}{U_2^2} = \eta_{id} \psi_t$$

Il rapporto L/D è costante
se è assolta la similitudine
geometrica

$$\eta_{id} = 1 - \frac{f \frac{L}{D} \frac{C^2}{2}}{\psi_t U_2^2} = 1 - \frac{f \frac{L}{D} \frac{C^2}{2 U_2^2}}{\psi_t}$$

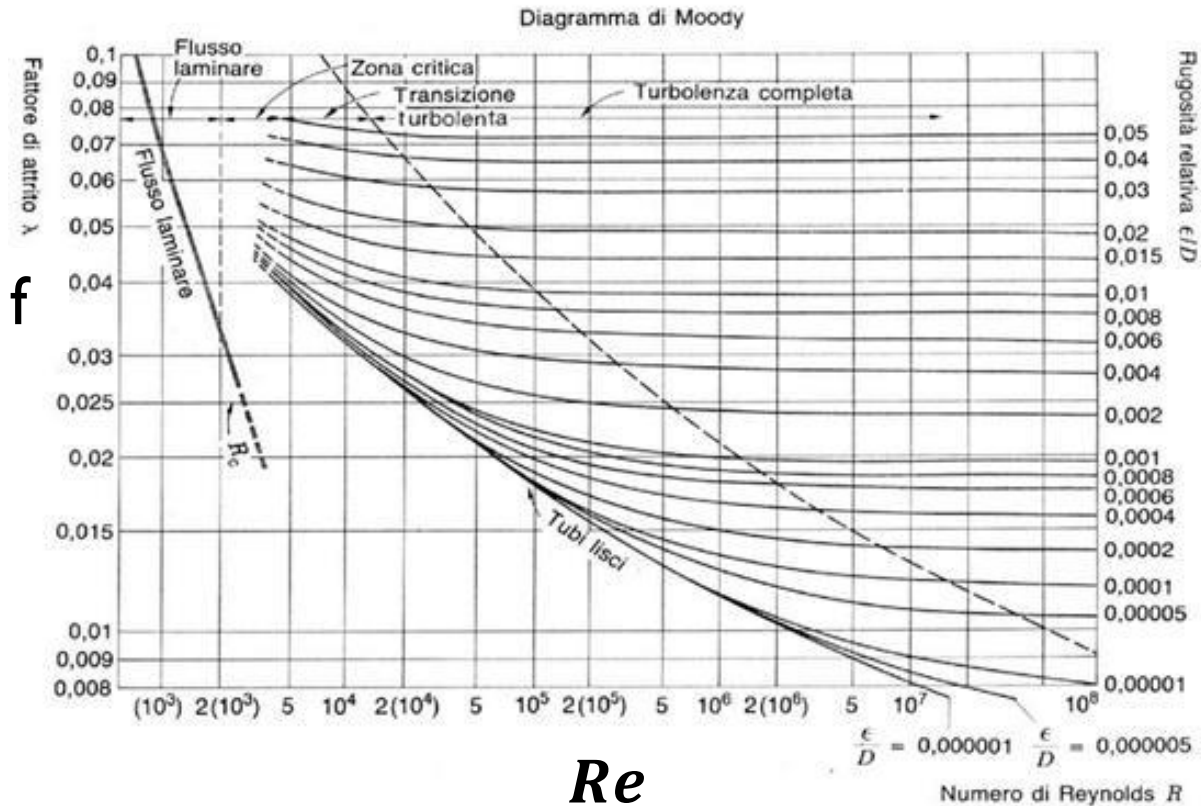
$C/U = \text{cost}$ se è verificata
la similitudine cinematica

$\psi_t = \text{cost}$ se è verificata la
similitudine geometrica e
cinematica

$$\Rightarrow \eta_{id} = \mathcal{F}(f)$$

Il rendimento η_{id}
dipende dal coefficiente
di attrito f

Influenza del numero di Reynolds



$$\frac{\epsilon}{D}$$

$$f = \mathcal{F}\left(Re, \frac{\epsilon}{D}\right)$$

Similitudine geometrica

$$Re = \rho \omega D^2 / \mu > 10^5 \div 10^6$$

Se il moto è turbolento pienamente sviluppato, $f = \text{cost}$ e la similitudine meccanica è verificata



Influenza del numero di Reynolds

- In condizioni di **moto turbolento pienamente sviluppato** $f = \text{cost}$ (diagramma di Moody) e il rendimento idraulico η_{id} si mantiene costante:

$$\eta_{id} = 1 - \frac{f \frac{L}{D}}{\psi_t} \frac{c^2}{2U_2^2} = \text{cost}$$

$$\Rightarrow \psi = f(N_f, \varphi, Re)$$

- Questa relazione si basa però sull'ipotesi che la scabrezza relativa di due macchine geometricamente simili sia costante:

$$\frac{\epsilon}{D} = \text{cost}$$

... ma la **scabrezza assoluta** ϵ dipende dalla **lavorazione** e non varia apprezzabilmente fra modello e prototipo!!



Leggi di affinità

Leggi di affinità

Come si **relazionano** tra loro le caratteristiche (Q_v, h, D_2) di due macchine A e B?

- Se le due macchine A e B sono in **similitudine meccanica**, i loro numeri adimensionali sono **uguali** e questo porta alla definizione di leggi che vengono chiamate **leggi di affinità**:

$$\varphi_{D_A} = \varphi_{D_B} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_{vA}}{\omega_A D_{2,A}^3} = \frac{Q_{vB}}{\omega_B D_{2,B}^3}$$

$$\psi_{D_A} = \psi_{D_B} \quad \Rightarrow \quad \frac{gh_A}{\omega_A^2 D_{2,A}^2} = \frac{gh_B}{\omega_B^2 D_{2,B}^2}$$

*Sebbene la similitudine valga in ogni punto della macchina, solitamente si riferiscono i numeri funzionali alla **sezione 2** di **uscita della girante***

- Tali leggi consentono di determinare le condizioni operative di un'altra macchina meccanicamente **simile** o della stessa macchina ad una diversa **velocità di rotazione**

Leggi di affinità

- Per due macchine in similitudine valgono allora le seguenti relazioni tra parametri operativi e geometrici:

$$\varphi_D = \frac{Q_{vA}}{\omega_A D_{2,A}^3} = \frac{Q_{vB}}{\omega_B D_{2,B}^3} \Rightarrow Q_{vB} = Q_{vA} \frac{\omega_B}{\omega_A} \left(\frac{D_{2,B}}{D_{2,A}} \right)^3$$

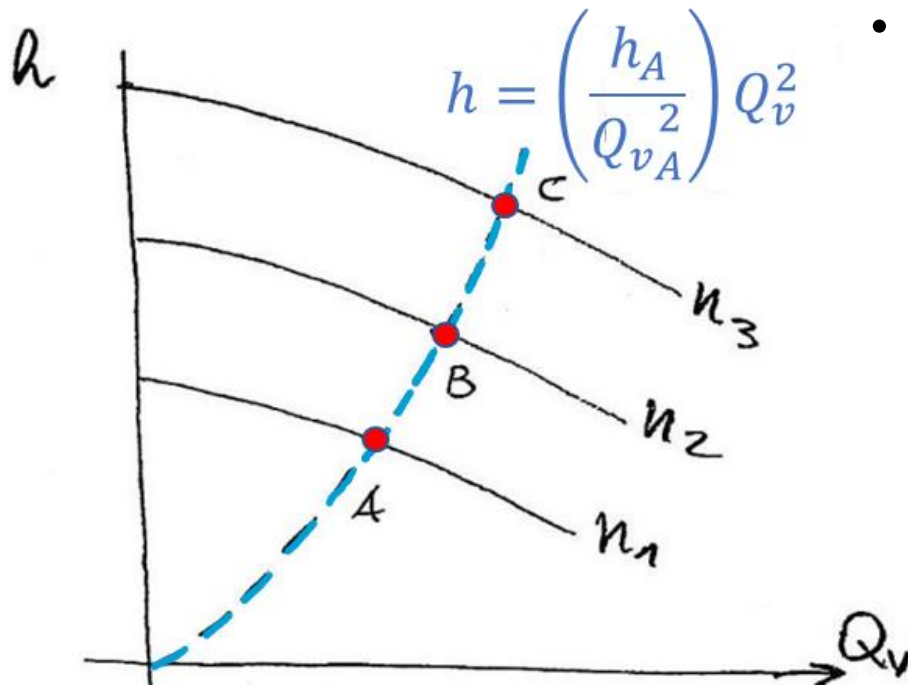
$$\psi_D = \frac{gh_A}{\omega_A^2 D_{2,A}^2} = \frac{gh_B}{\omega_B^2 D_{2,B}^2} \Rightarrow h_B = h_A \left(\frac{\omega_B}{\omega_A} \right)^2 \left(\frac{D_{2,B}}{D_{2,A}} \right)^2$$

- Se la macchina è la stessa ($D_{2,A} = D_{2,B}$):

$$\left. \begin{aligned} Q_{vB} &= Q_{vA} \left(\frac{D_{2,B}}{D_{2,A}} \right)^3 \frac{\omega_B}{\omega_A} = Q_{vA} \frac{n_B}{n_A} \\ h_B &= h_A \left(\frac{D_{2,B}}{D_{2,A}} \right)^2 \left(\frac{\omega_B}{\omega_A} \right)^2 = h_A \left(\frac{n_B}{n_A} \right)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_B = \left(\frac{h_A}{Q_{vA}^2} \right) Q_{vB}^2$$

dove A e B sono **punti omologhi**, cioè punti operativi della macchina in similitudine tra di loro

Leggi di affinità

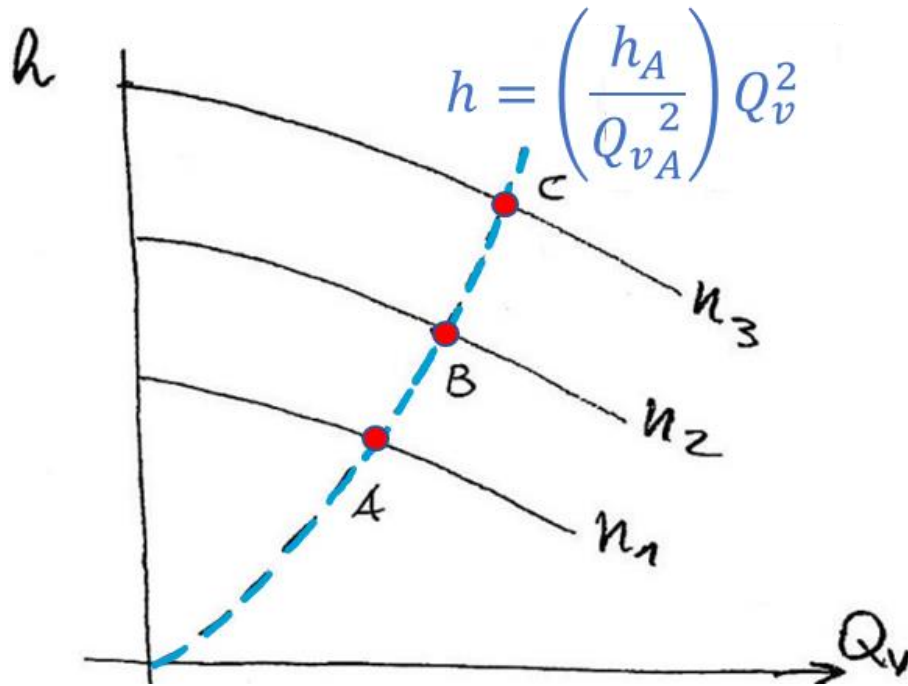


- Il luogo dei **punti omologhi** di funzionamento (stessi φ_D e ψ_D) è rappresentato da una parabola passante per l'origine delle coordinate Q_v, h

Punti omologhi di funzionamento:
condizioni operative in similitudine
meccanica tra loro

- I punti A, B, C sono caratterizzati dagli stessi valori dei numeri di flusso φ_D e di pressione ψ_D
- Non tutti i punti operativi sono in similitudine ma solo quelli che hanno gli stessi valori dei numeri di flusso φ_D e di pressione ψ_D

Leggi di affinità

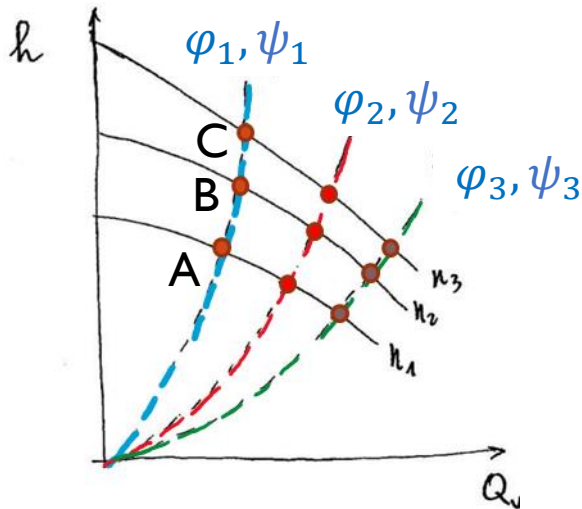


- La similitudine meccanica può essere espressa anche tramite tutti i parametri dimensionali **strettamente correlati** ai numeri funzionali
- Le stesse leggi possono quindi essere definite facendo riferimento al numero di flusso φ e al numero di pressione ψ

$$\varphi_{DA} = \varphi_{DB} \quad \longleftrightarrow \quad \varphi_A = \varphi_B \quad \longrightarrow \quad \frac{Cm_{2,A}}{U_{2,A}^2} = \frac{Cm_{2,B}}{U_{2,B}^2}$$

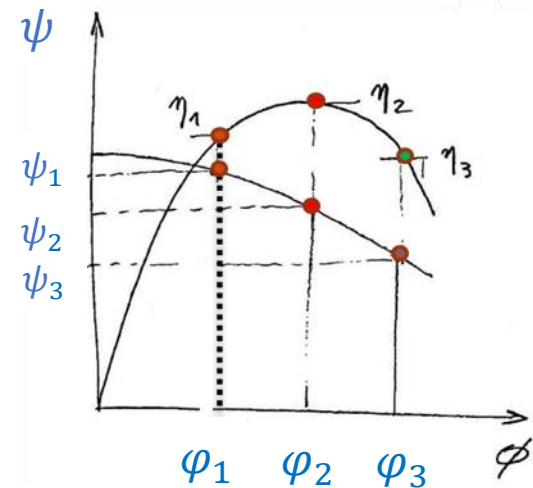
$$\psi_{DA} = \psi_{DB} \quad \longleftrightarrow \quad \psi_A = \psi_B \quad \longrightarrow \quad \frac{gh_A}{U_{2,A}^2} = \frac{gh_B}{U_{2,B}^2}$$

Leggi di affinità

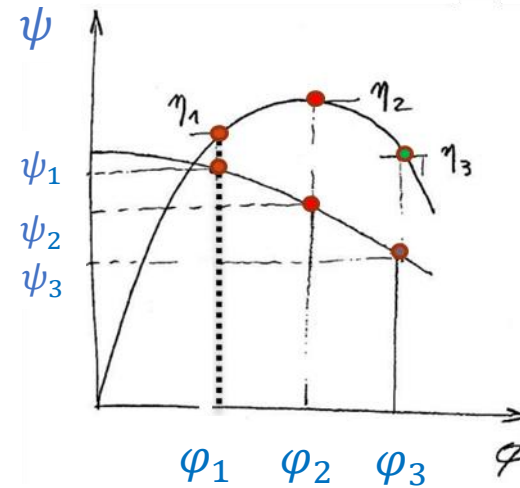
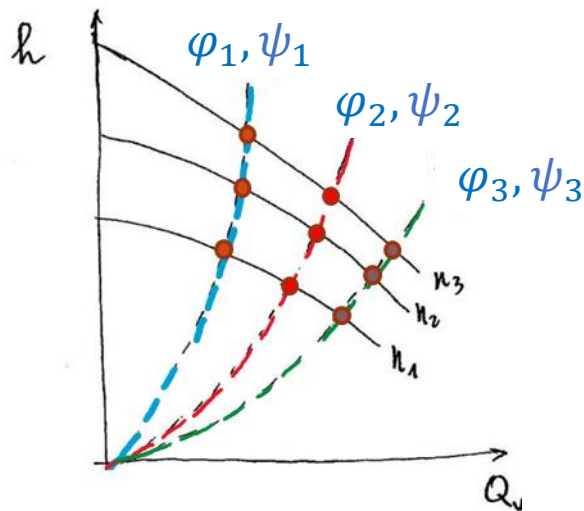


- Ci sono diverse famiglie di punti omologhi, ciascuna associata ad una coppia di valori di numero di pressione e flusso diversi

- Se le curve caratteristiche, anziché in funzione di Q_v e h , sono espresse in funzione di φ e di ψ , i punti A, B, C si sovrappongono in un unico punto che rappresenta tutti i punti omologhi in similitudine tra di loro



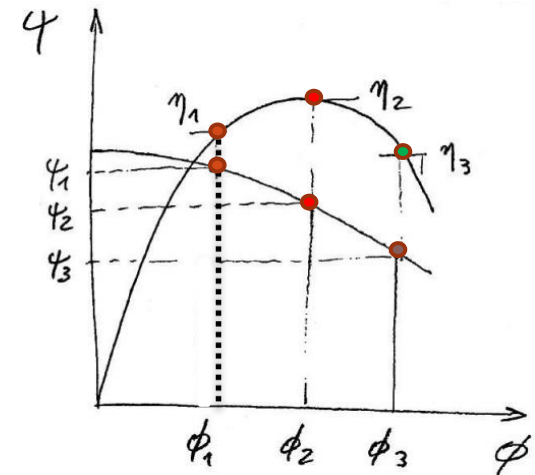
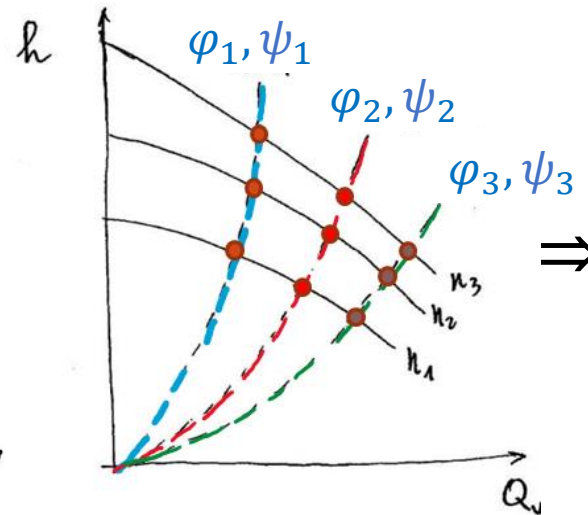
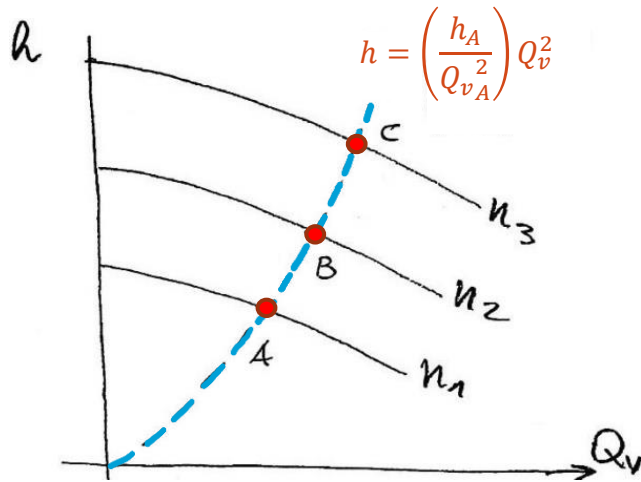
Leggi di affinità



- Si ottiene così un'unica curva $\psi = f(\phi)$ che rappresenta non solo il funzionamento di una data macchina al variare del regime di rotazione ω ...

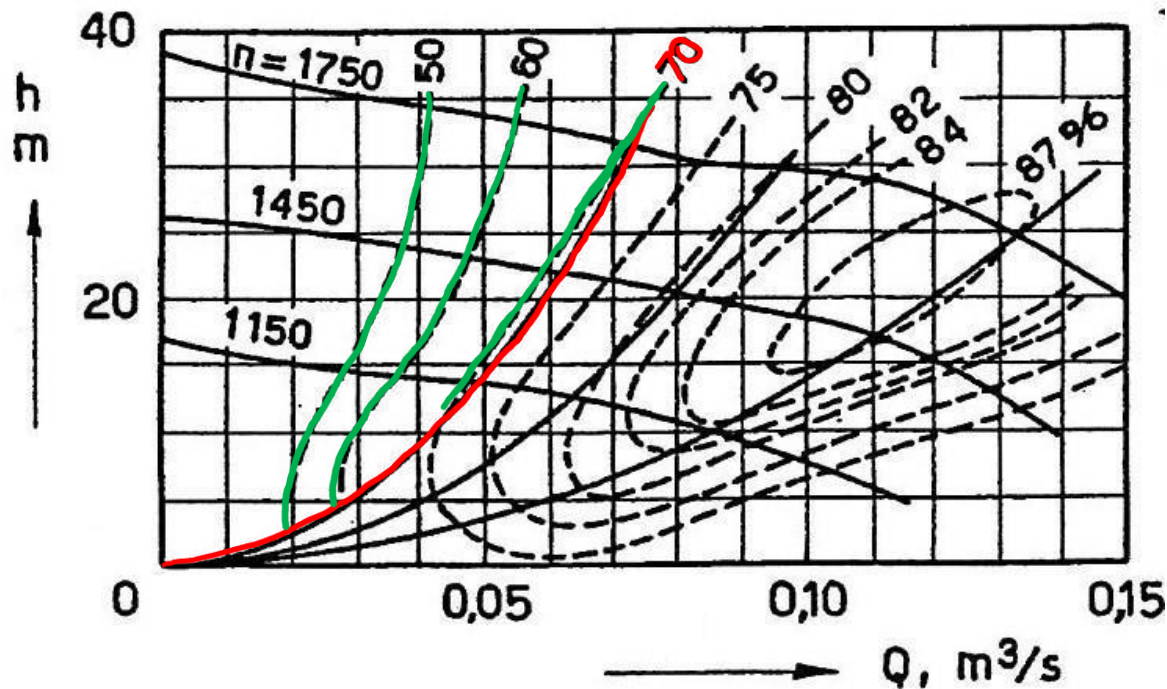
... ma anche quello di ogni **altra macchina** in similitudine meccanica con quella

Leggi di affinità



- In punti omologhi il **rendimento idraulico** si mantiene costante
 - Se anche le **perdite meccaniche** seguissero le stesse leggi di quelle idrauliche, il rendimento complessivo non cambierebbe
- ⇒ Un'unica curva sarebbe in grado di rappresentare, in funzione di ϕ , il rendimento complessivo η di una macchina al variare del regime di rotazione o di un'altra macchina a quella geometricamente simile

Leggi di affinità



- In **realtà** la dipendenza delle **perdite meccaniche** dal regime di rotazione è **diversa** da quella delle perdite **fluidodinamiche** perché la potenza per attriti meccanici varia con ω con un esponente sensibilmente **inferiore a 3**
- Gli **errori** di previsione del rendimento sono perciò più evidenti ai **bassi regimi** di rotazione

Leggi di affinità – Esercizi

Esercizio 1

Si consideri una pompa centrifuga caratterizzata dai seguenti dati di targa:

- Portata volumetrica $Q_v = 0.028 \text{ m}^3/\text{s}$
- Prevalenza $h = 45 \text{ m}$
- Velocità di rotazione $n = 1600 \text{ giri}/\text{minuto}$
- Potenza all'albero $P_{alb} = 15.6 \text{ kW}$
- Densità del fluido $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$
- Accelerazione di gravità $g = 9.806 \text{ m}/\text{s}^2$

Determinare le caratteristiche funzionali di una macchina simile operante ad una velocità di rotazione $n = 2000 \text{ giri}/\text{minuto}$

Esercizio 2

Si consideri una pompa centrifuga caratterizzata dai seguenti dati di targa:

- Portata volumetrica $Q_v = 0.028 \text{ m}^3/\text{s}$
- Prevalenza $h = 45 \text{ m}$
- Velocità di rotazione $n = 1600 \text{ giri}/\text{minuto}$
- Potenza all'albero $P_{alb} = 15.6 \text{ kW}$
- Rendimento $\eta = 79\%$
- Densità del fluido $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$
- Accelerazione di gravità $g = 9.806 \text{ m}/\text{s}^2$

Esercizio 2

Determinare:

1. le caratteristiche funzionali $\left(\frac{D_{2_{1200\text{ rpm}}}}{D_{2_{1600\text{ rpm}}}}, Q_{v_{1200\text{ rpm}}} \right)$ di una macchina simile che sia in grado, grazie alla variazione delle dimensioni, di
 - Fornire una prevalenza $h = 45\text{ m}$
 - Operando alla velocità di rotazione $n = 1200\text{ giri}/\text{minuto}$
2. le caratteristiche funzionali $\left(\frac{D_{2_{1200\text{ rpm}}}}{D_{2_{1600\text{ rpm}}}}, h_{1200\text{ rpm}} \right)$ di una macchina simile che sia in grado, grazie alla variazione delle dimensioni, di
 - Fornire una portata volumetrica $Q_v = 0.028\text{ m}^3/\text{s}$
 - Operando alla velocità di rotazione $n = 1200\text{ giri}/\text{minuto}$

Esercizio 3

Si consideri una turbina idraulica denominata MODELLO (M) caratterizzata da un rapporto di scala 1: 10 e avente i seguenti dati di targa:

- Portata volumetrica $Q_{v_M} = 0.08 \text{ m}^3/\text{s}$
- Caduta nominale $h_M = 40 \text{ m}$
- Velocità di rotazione $n_M = 3500 \text{ giri}/\text{minuto}$
- Potenza all'albero $P_{alb_M} = 28.0 \text{ kW}$
- Rendimento $\eta_M = 90\%$
- Densità del fluido $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$
- Accelerazione di gravità $g = 9.806 \text{ m}/\text{s}^2$

Determinare le caratteristiche funzionali $(Q_{v_P}, n_P, P_{alb_P})$ di una macchina simile denominata PROTOTIPO (P) sapendo che $h_M = h_P$





Effetto scala

Effetto scala

$$\psi = f(N_f, \varphi, Re)$$

In condizioni di moto turbolento
pienamente sviluppato

- Questa relazione si basa però sull'ipotesi che la scabrezza relativa di due macchine geometricamente simili sia costante:

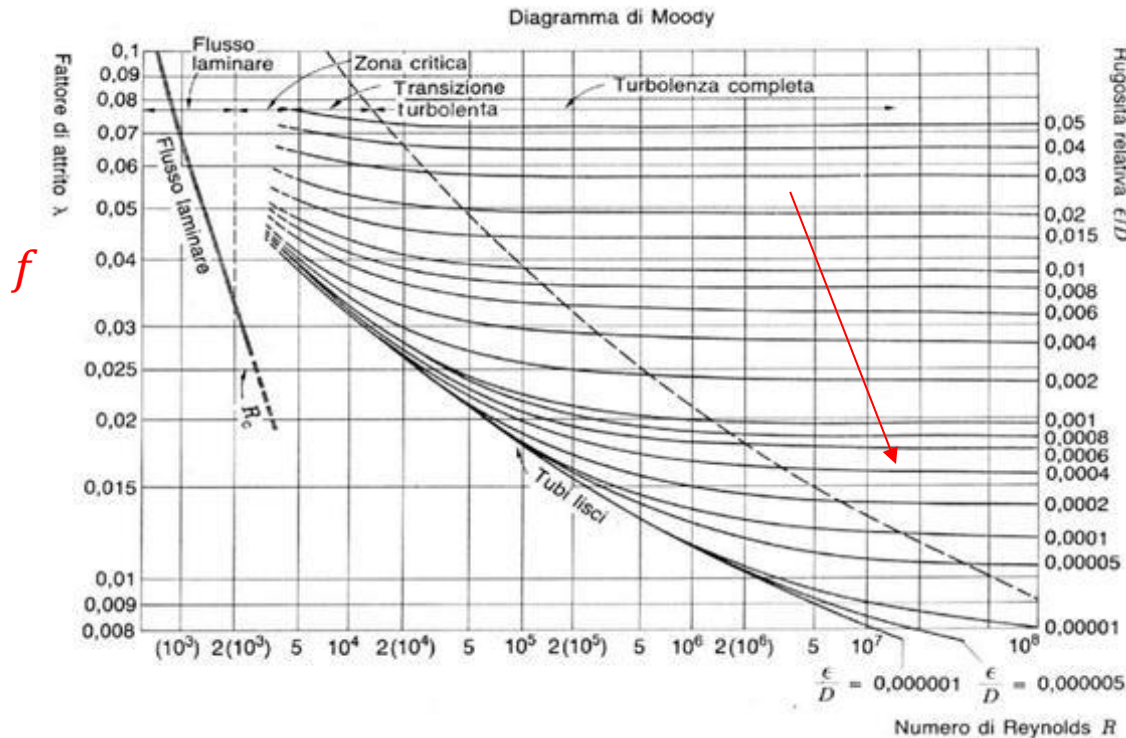
$$\frac{\epsilon}{D} = cost$$

... ma la **scabrezza assoluta** ϵ dipende dalla **lavorazione** e non varia apprezzabilmente fra modello e prototipo!!

- La **scabrezza relativa** quindi **diminuisce** all'aumentare della **taglia** delle macchine anche se è assolta la similitudine geometrica
- Quando il **rapporto di scala** tra macchine geometricamente simili è **elevato**, si ha una significativa variazione di scabrezza relativa:

$$\frac{\epsilon}{D} \neq cost$$

Effetto scala



- All'aumentare della dimensione della macchina, la scabrezza relativa diminuisce

$$\eta_{id} = 1 - \frac{f \frac{L}{D}}{\psi_t} \frac{c^2}{2U_2^2}$$

- Macchine di taglia maggiore, anche se è assolta la similitudine geometrica, mostreranno rendimenti più elevati (effetto scala)

$$\psi_t = \frac{gh_t}{U_2^2} = f(N_f, \varphi) = cost$$

$$\Rightarrow \psi \neq cost$$

$$\eta_{id} \neq cost$$



Effetto scala

- L'effetto scala potrebbe essere inglobato nella similitudine introducendo un fattore correttivo al rendimento e quindi andando a stimare il numero di pressione corretto
- Si ipotizzi di avere due macchine A e B per le quali è verificata la similitudine geometrica e cinematica

HP: $N_{fA} = N_{fB}$ $\varphi_A = \varphi_B$



$$\psi_{tA} = \psi_{tB}$$

- Noto il rendimento idraulico di una macchina η_{idA} , tramite opportuna correlazione correttiva, si potrebbe determinare il numero di pressione di entrambe le macchine:

$$\eta_{idA}$$



$$\psi_A = \eta_{idA} \psi_{tA}$$



$$\eta_{idB}$$



$$\psi_B = \eta_{idB} \psi_{tB}$$



Correlazioni effetto scala

Table 2.1 A selection of model scale formulae (as quoted for example by Nixon (1965). Subscript m denotes 'model')

Moody (1942):
$$\frac{1 - \eta}{1 - \eta_m} = \left(\frac{D_m}{D} \right)^n \quad 0 \leq n \leq 0.26$$

Moody:
$$\frac{1 - \eta}{1 - \eta_m} = \left(\frac{H_m}{H} \right)^{0.01} \left(\frac{D_m}{D} \right)^{0.25}$$

Anderson:
$$\frac{1 - \eta}{1 - \eta_m} = \frac{0.94 - Q^{-0.32}}{0.94 - Q_m^{-0.32}}$$

Pfleiderer:

$$\frac{1 - \eta}{1 - \eta_m} = \left(\frac{R_{em}}{R_e} \right)^{0.01} \left(\frac{D_m}{D} \right)^{0.25} \quad \text{valid between } 1/12 < R_{em}/R_e < 20$$

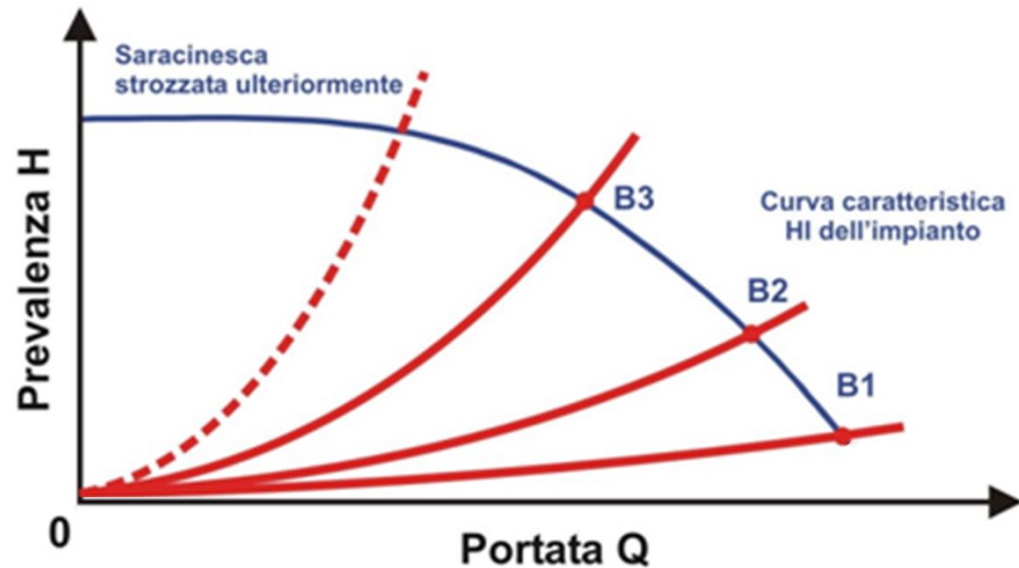
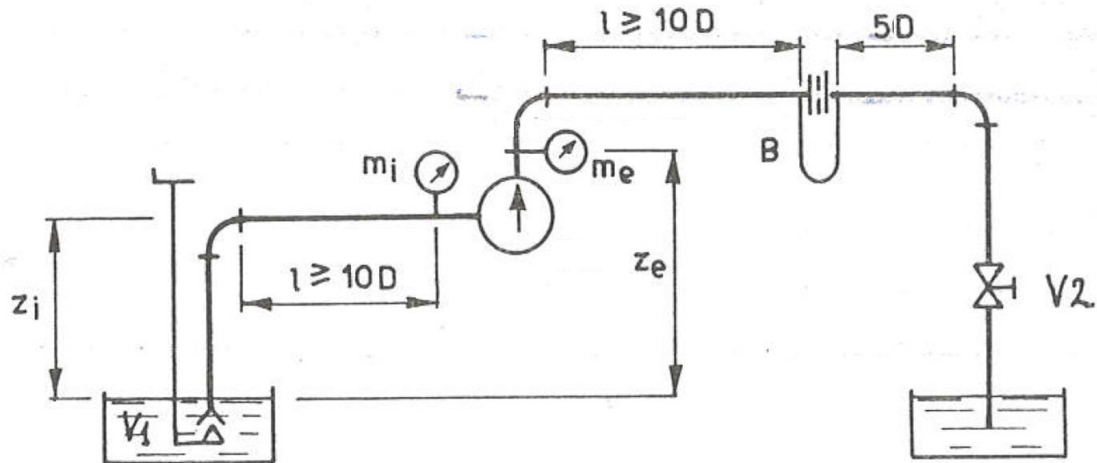
Hutton:
$$\frac{1 - \eta}{1 - \eta_m} = 0.3 + 0.7 \left(\frac{R_{em}}{R_e} \right)^{0.2}$$

Ackèret:
$$\frac{1 - \eta}{1 - \eta_m} = 0.5 \left[1 + \left(\frac{R_{em}}{R_e} \right)^{0.2} \right]$$

Regolazione della portata

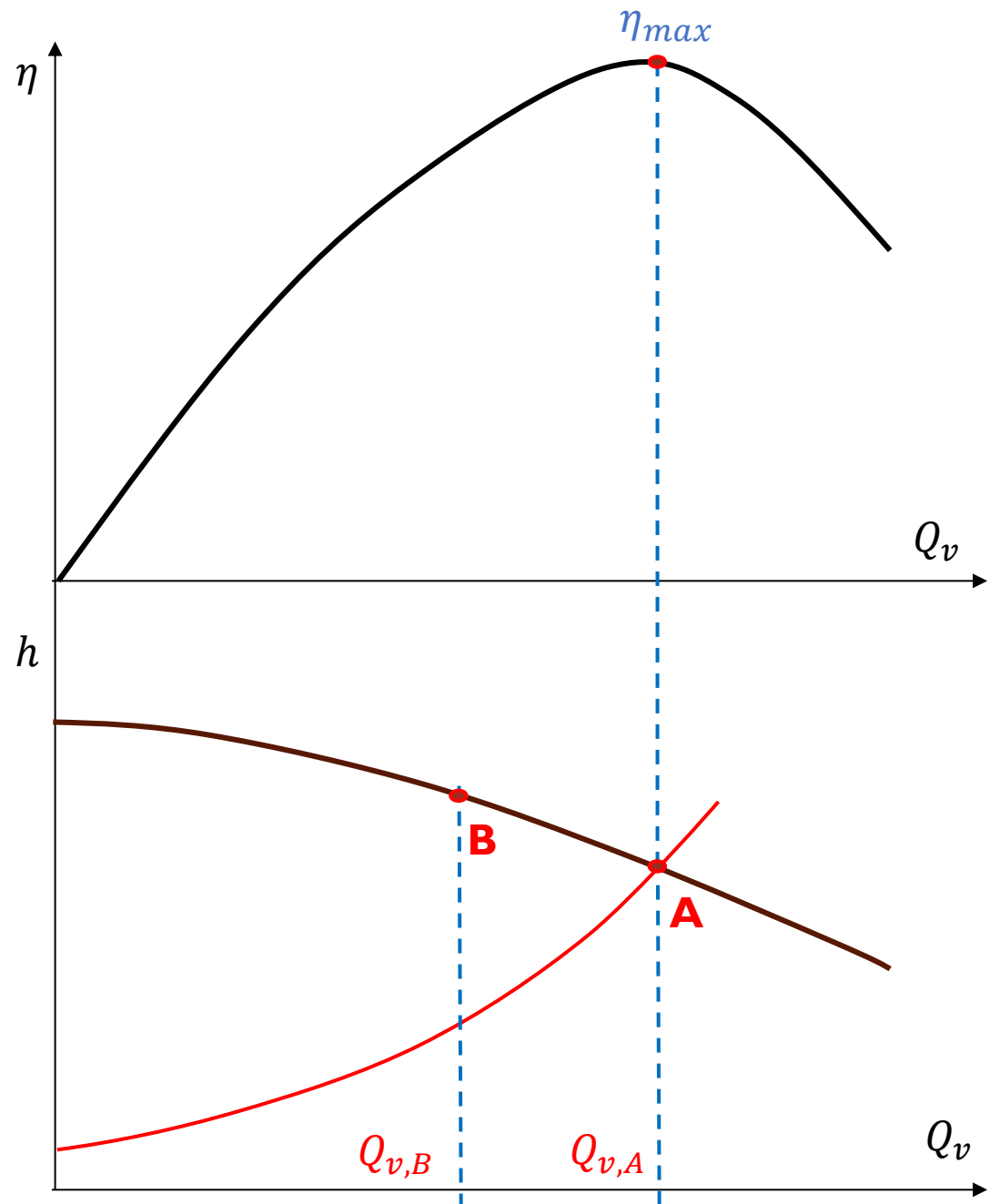
Valvola a saracinesca vs. variazione del regime di rotazione

Leggi di affinità



Modalità di regolazione

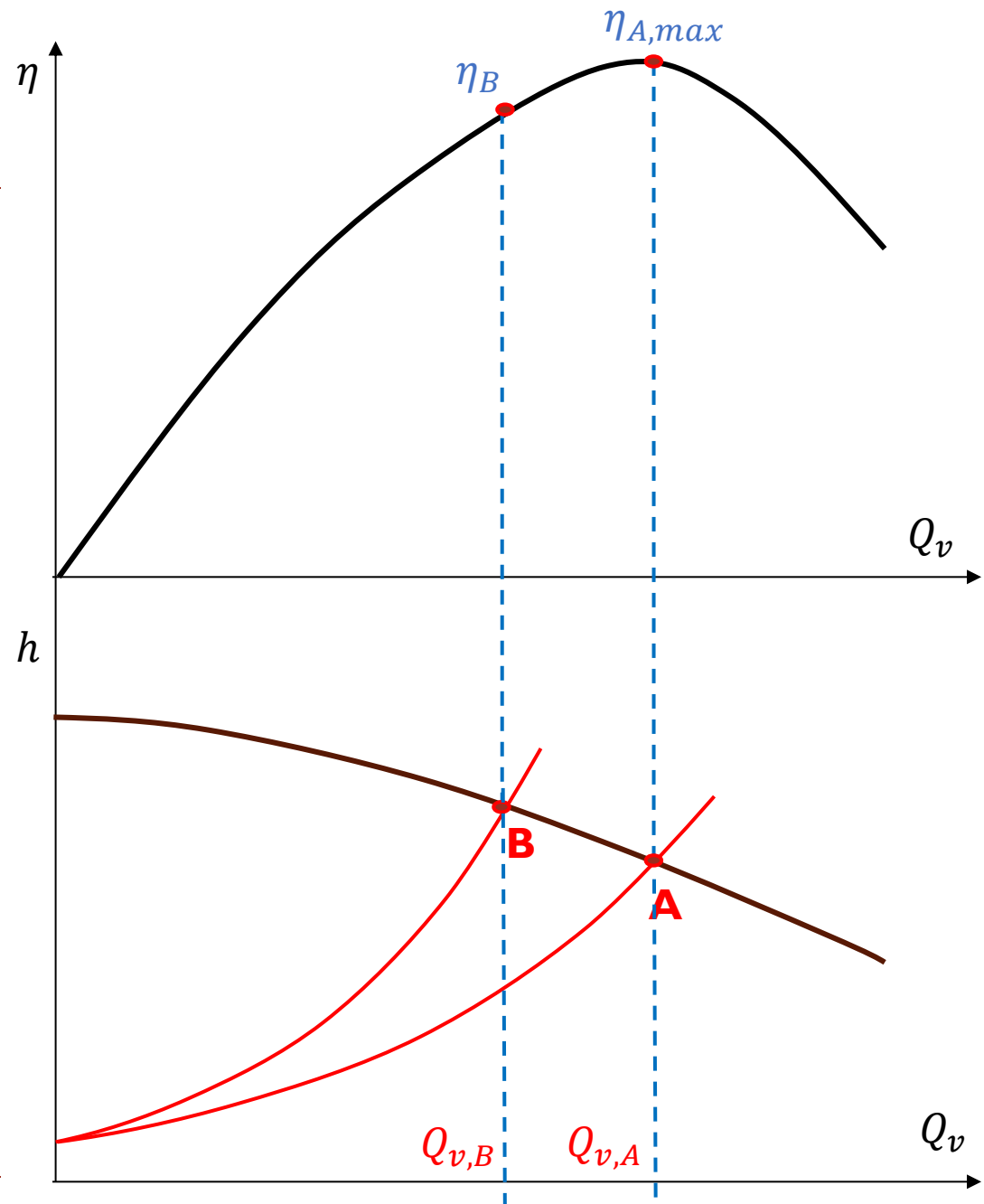
- Negli impianti di pompaggio la regolazione della portata viene di solito eseguita per il tramite di una **saracinesca** disposta nel ramo di mandata del circuito
- Le condizioni nominali di esercizio sono rappresentate dal punto **A** di intersezione della curva della prevalenza h della pompa con la caratteristica resistente h_r dell'impianto (**punto A**)
- Si supponga che sia richiesta una portata $Q_{v,B}$ inferiore a quella nominale



Modalità di regolazione

Regolazione con saracinesca

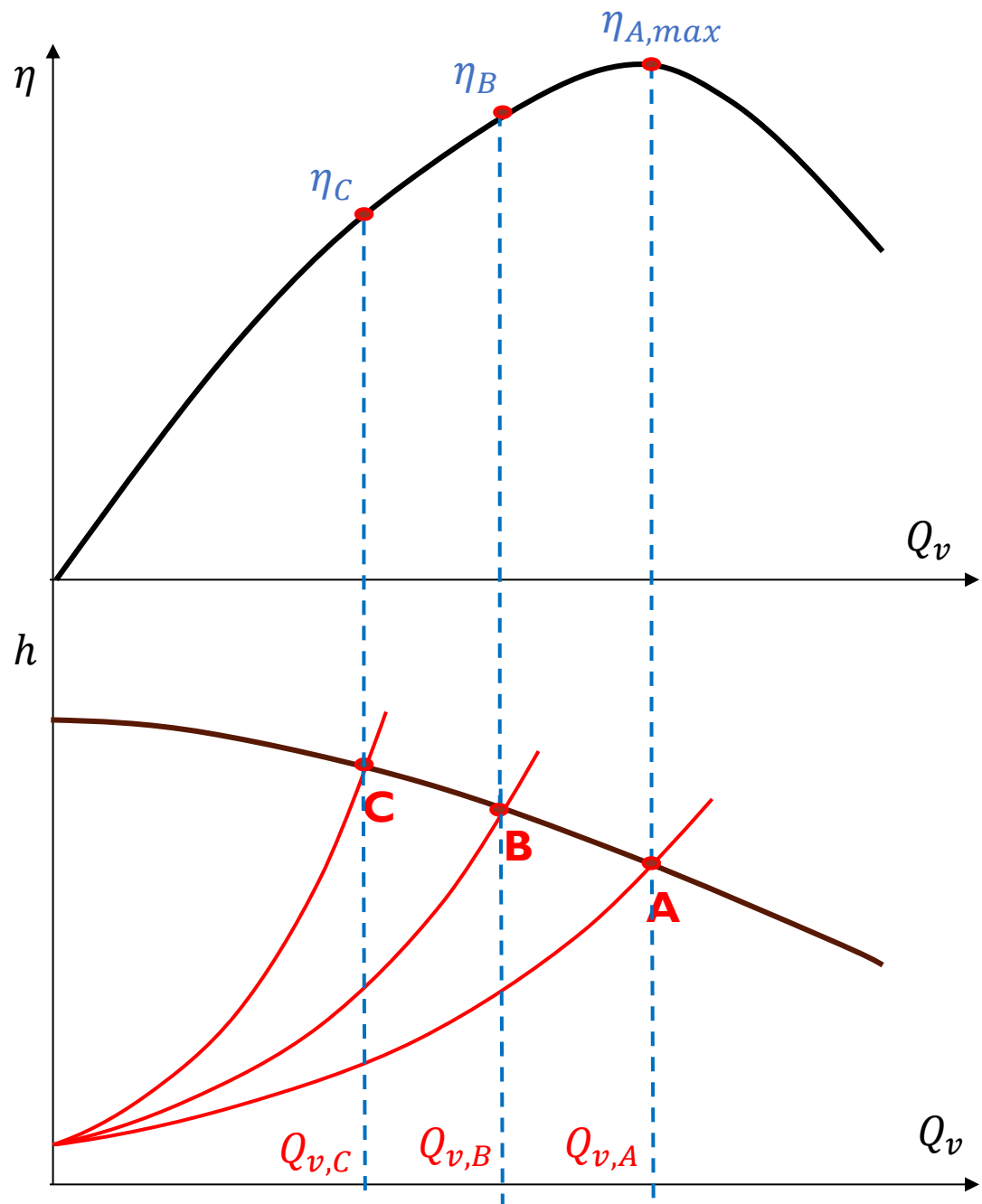
- Si chiude progressivamente la saracinesca finché la nuova caratteristica resistente h_r' dell'impianto intersecherà la prevalenza della pompa nel punto B
- Il rendimento della pompa si riduce rispetto alle condizioni nominali, assumendo il valore η_B



Modalità di regolazione

Regolazione con saracinesca

- Analogamente, la portata di esercizio $Q_{v,C}$ si otterrà chiudendo ulteriormente la saracinesca finché la nuova caratteristica resistente dell'impianto intersecherà in **C** la curva della prevalenza h della pompa
- Il rendimento della pompa η_C subirà un'ulteriore riduzione



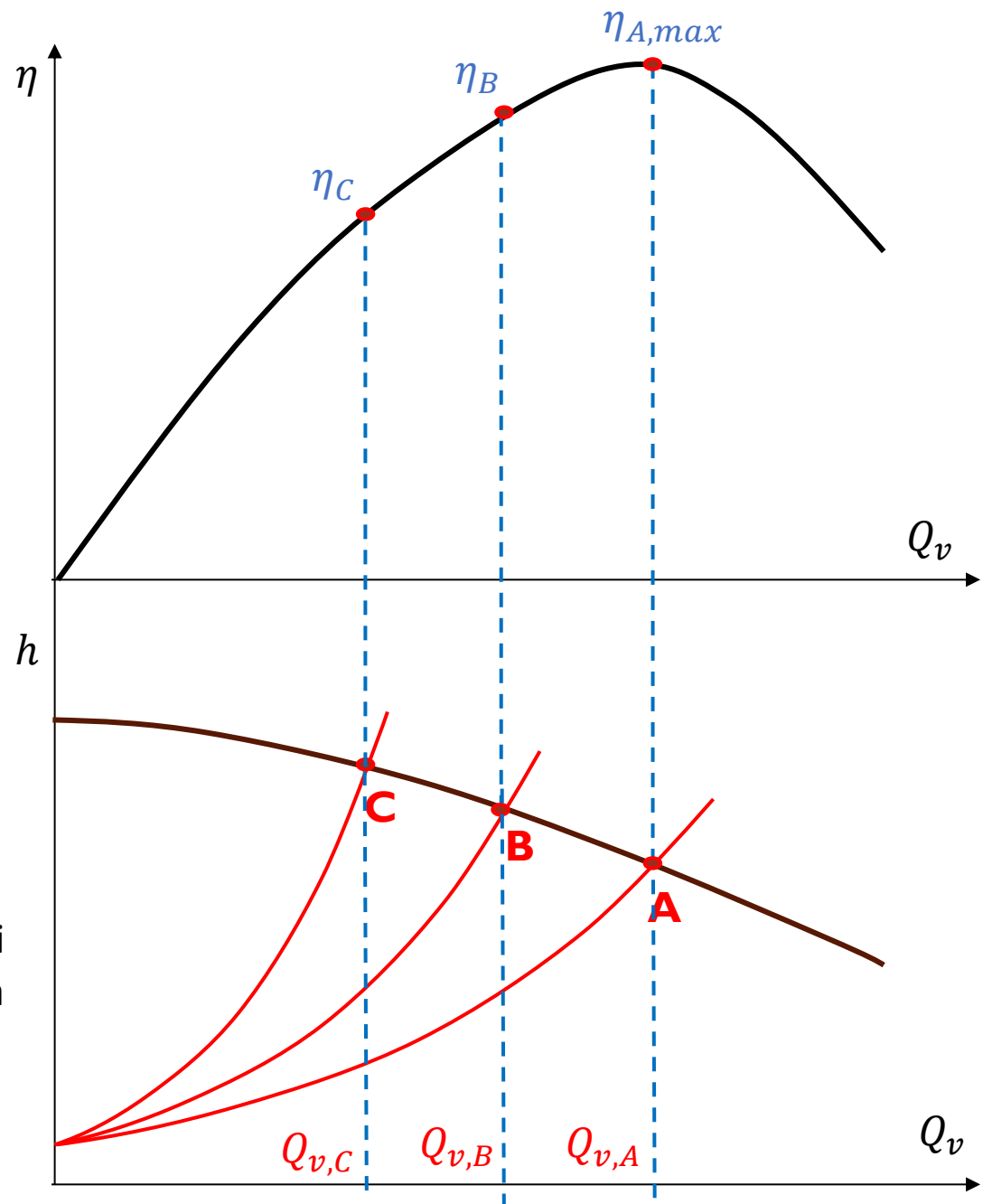
Modalità di regolazione

Regolazione con saracinesca

- La potenza P assorbita dalla pompa è data da:

$$P = \frac{\rho Q_v g h}{\eta}$$

- L'abbassamento del η è dovuto alle perdite di laminazione introdotte a seguito della regolazione tramite saracinesca
- Per eliminare queste perdite si impiegano sistemi di regolazione a velocità di rotazione n variabile

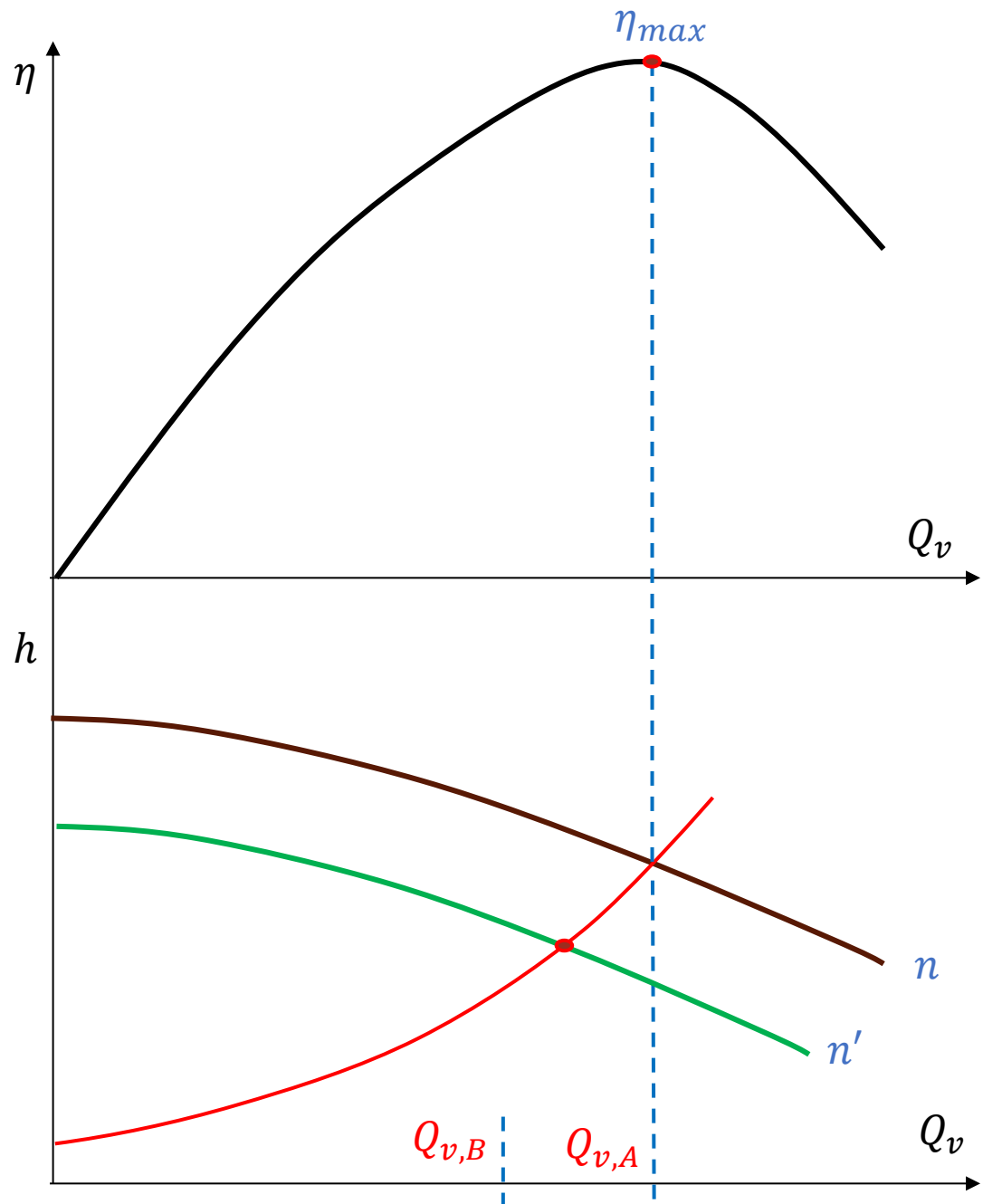


Modalità di regolazione

Regolazione con inverter

(n variabile)

- Se si modifica la velocità di rotazione n di una macchina, la curva caratteristica della macchina varia
- Se, durante la modifica del regime di rotazione, il grado di apertura della valvola resta invariato, la caratteristica resistente dell'impianto **non cambia**
- Riducendo quindi il regime di rotazione, il punto di funzionamento cambia



Modalità di regolazione

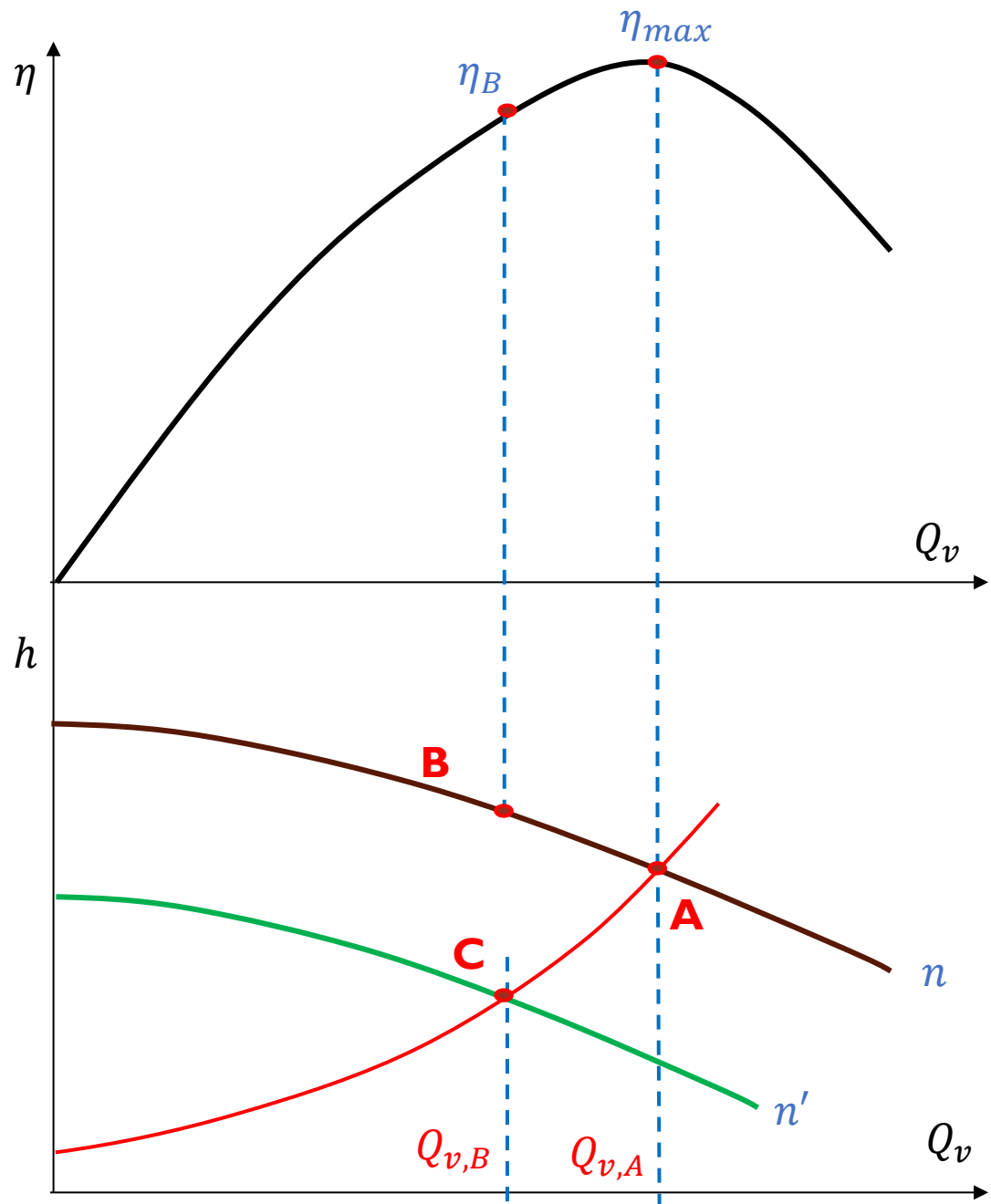
Regolazione con inverter

(n variabile)

- Si può quindi continuare a diminuire il regime di rotazione fino a raggiungere il punto di funzionamento **C** con il valore di portata desiderato $Q_{v,C} = Q_{v,B}$

Che rendimento avrà la macchina nel punto **C**? Maggiore o minore di **B**?

- In **B** il rendimento è noto
- Per determinare quello di **C** si deve trovare il punto in similitudine meccanica con **C** al regime di rotazione n



Modalità di regolazione

Regolazione con inverter

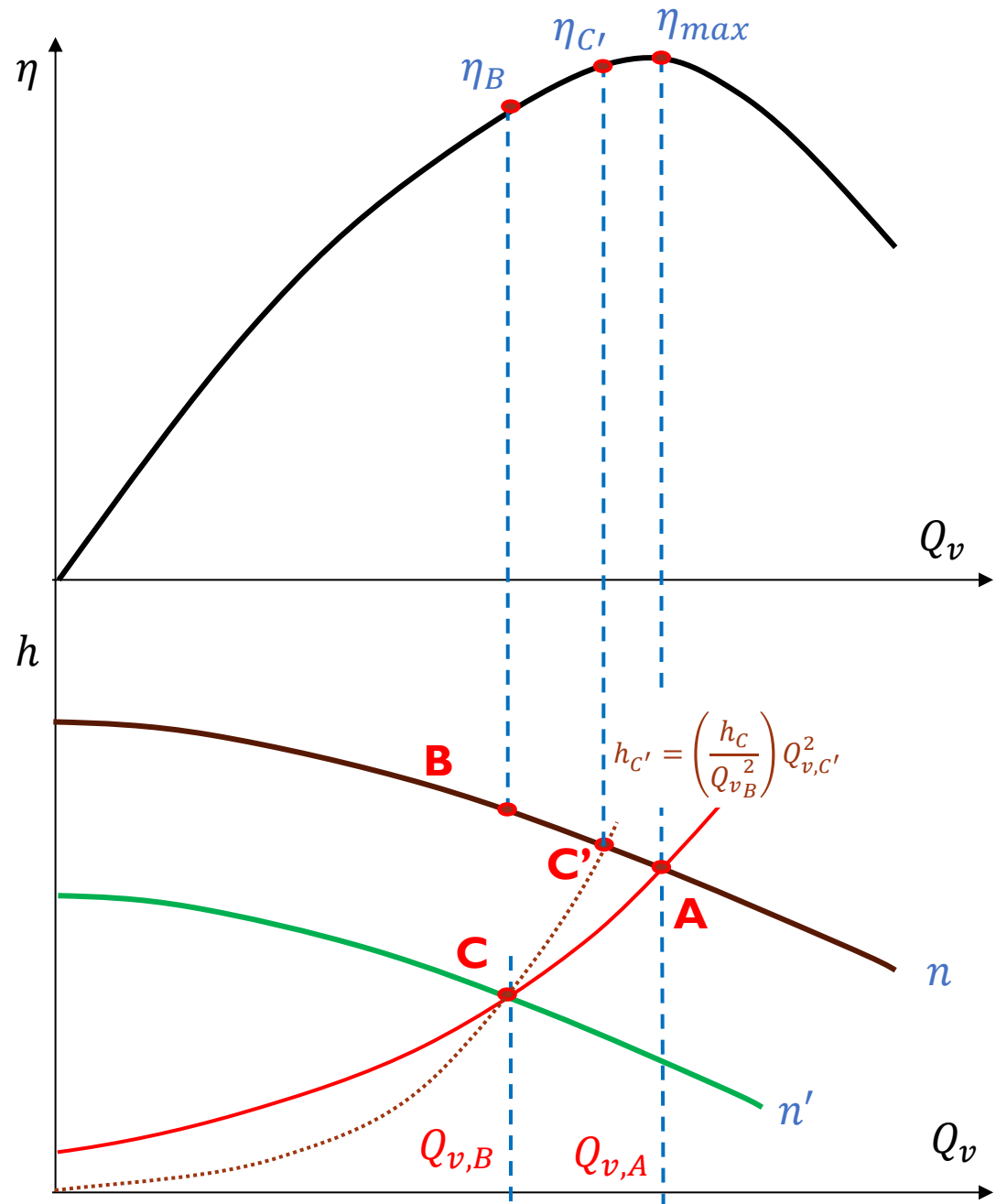
(n variabile)

- Il punto C' in similitudine meccanica si trova sfruttando la legge di affinità:

$$h_{C'} = \left(\frac{h_C}{Q_{vC}^2} \right) Q_{v,C'}^2$$

$$h_{C'} = \left(\frac{h_C}{Q_{vB}^2} \right) Q_{v,C'}^2$$

- Il punto C' avrà quindi un rendimento superiore al punto B

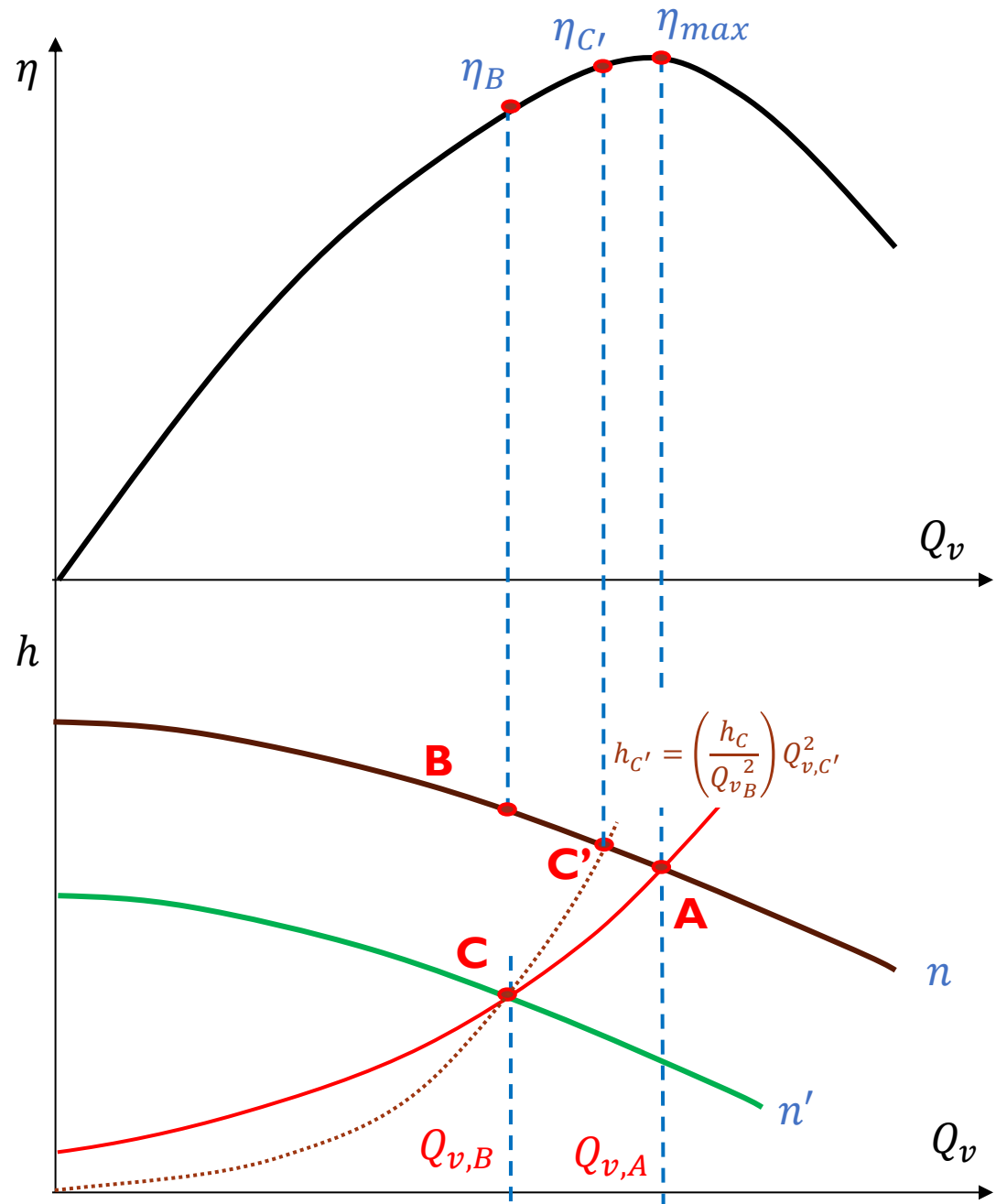


Modalità di regolazione

Regolazione con inverter

(n variabile)

- L'impiego di un motore di azionamento a velocità di rotazione n variabile permette di ridurre la potenza assorbita $P = \rho Q_v g h / \eta$ da una pompa perché, per una data portata Q_v , consente di ridurre la prevalenza richiesta h e di aumentare il rendimento η
- Per contro aumentano i costi del macchinario di azionamento, circostanza che ne limita l'impiego agli impianti di elevata potenza



Domande, Curiosità, Dubbi, Perplessità?

