



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA



Dipartimento  
di Ingegneria Industriale

# Critica alla teoria monodimensionale

Corso di Macchine 1

# Agenda

---

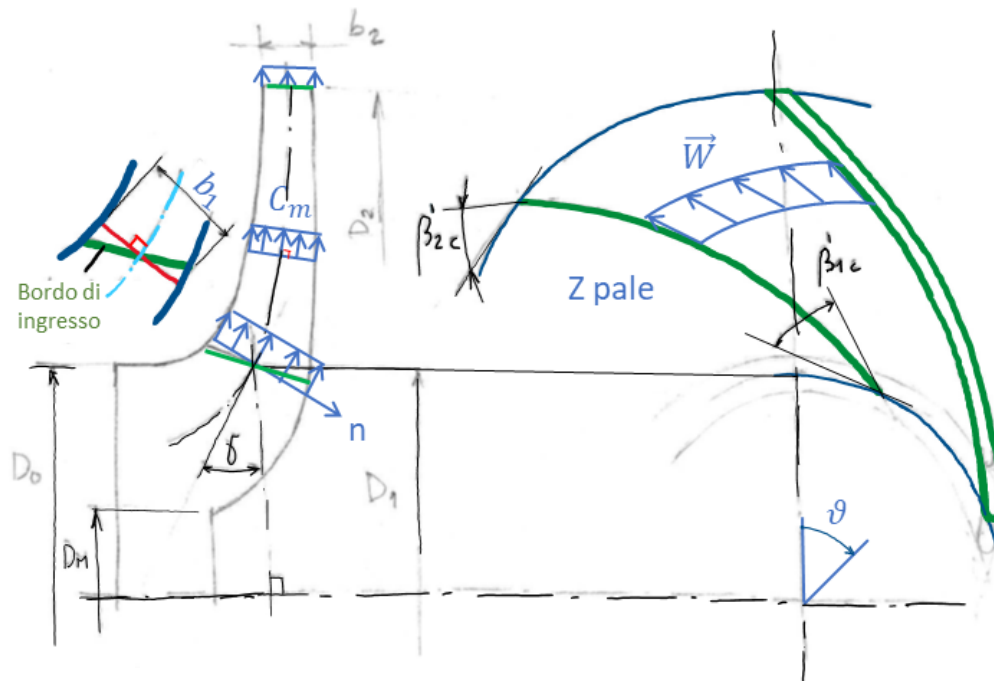
- ▶ Riepilogo: cosa dice la Teoria Monodimensionale o Euleriana?
- ▶ Critica alla teoria Euleriana
- ▶ Deviazione della corrente relativa



Riepilogo: cosa dice la Teoria  
Monodimensionale o Euleriana?

# Teoria euleriana

- Secondo la teoria euleriana, **quando i una girante si AZZERA la PORTATA**, le particelle fluide ruotano IN SOLIDO con la GIRANTE STESSA
- In questo modo, appena di RIPRISTINA la PORTATA, le TRAIETTORIE della CORRENTE di TRASPORTO, NON ESSENDO INFLUENZATE DALLA ROTAZIONE, hanno lo stesso andamento dei PROFILI PALARI



# Teoria euleriana

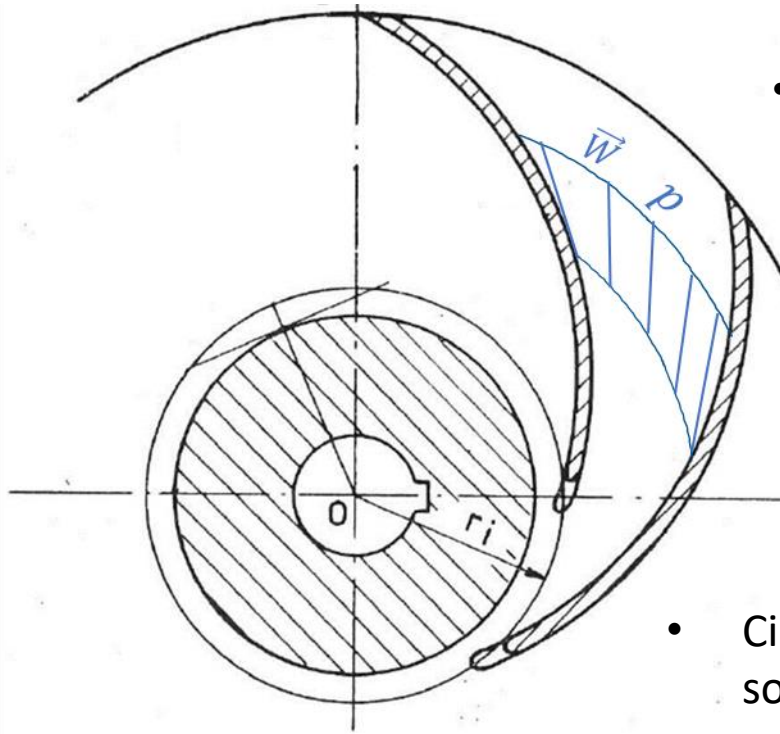
---

- In realtà, le particelle della CORRENTE RELATIVA (che ha carattere rotazionale), ruotano intorno ad un asse parallelo all'asse della macchina con una VELOCITA' UGUALE e CONTRARIA a quella del rotore!
- La rotazionalità della corrente relativa esercita una DUPLICE AZIONE sul fluido:
  - La velocità relativa  $W$  ha andamento diverso da quello delle pale!
  - All'imbocco e all'uscita del condotto la velocità relativa ha un angolo di inclinazione diverso da quello calcolato con il procedimento monodimensionale!



# Critica alla teoria Euleriana

# Critica alla teoria euleriana



- La teoria euleriana **descrive bene** il campo di moto?
- Offre **stime appropriate** del **lavoro** eseguito da una turbomacchina operatrice (pompa, compressore) o dell'**energia** meccanica che si rende disponibile all'albero di una turbomacchina motrice (turbina)?
- Ci sono **potenziali contraddizioni** della teoria euleriana sotto l'aspetto della meccanica classica!!!
- Si consideri il principio della variazione del momento della quantità di moto

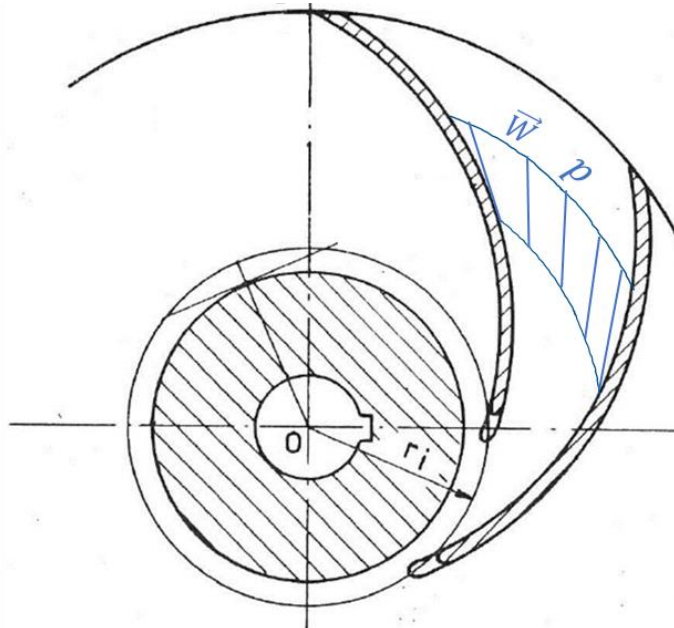
$$\Delta H^0 = gh_t = U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}$$

$$\left( \frac{p_2 - p_1}{\rho} \right)_{id} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2}$$

# Critica alla teoria euleriana

$$\Delta H^0 = gh_t = U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}$$

$$\left( \frac{p_2 - p_1}{\rho} \right)_{id} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2}$$



- L'incremento di pressione statica in condizioni ideali si riferisce ai **valori medi** tra monte e valle della girante; lo stesso vale per la variazione dei momenti angolari  $RC_u$
- Si ottiene (tralasciando il pedice "id"):

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{W_1^2 - U_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{W_2^2 - U_2^2}{2}$$

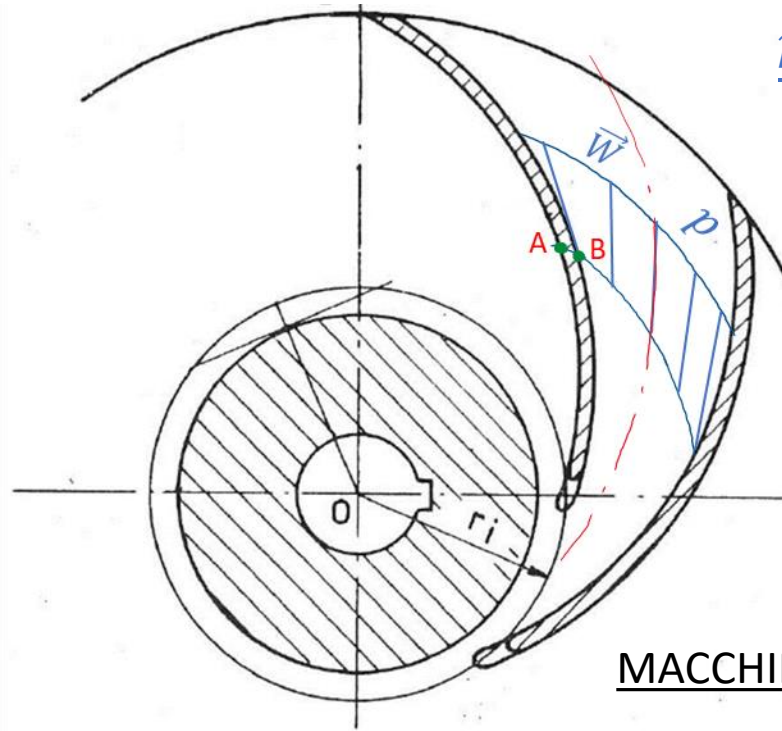
sicché, lungo la linea di corrente relativa media

$$\frac{p_w^0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{W^2 - U^2}{2} = \text{cost}$$

rimane **costante l'energia totale** della corrente **relativa**  $\frac{p_w^0}{\rho}$



# Critica alla teoria euleriana



$$\frac{p_w^0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{W^2 - U^2}{2} = \text{cost}$$

- L'ipotesi di assialsimmetria del campo di moto

$$\frac{\partial(\vec{W}, p, \dots)}{\partial \vartheta} = 0$$

comporta che le pressioni  $p_A$  e  $p_B$  nei punti  $A$  e  $B$  delle due facce di una stessa pala ( $r_A = r_B$ ), siano tra di loro uguali



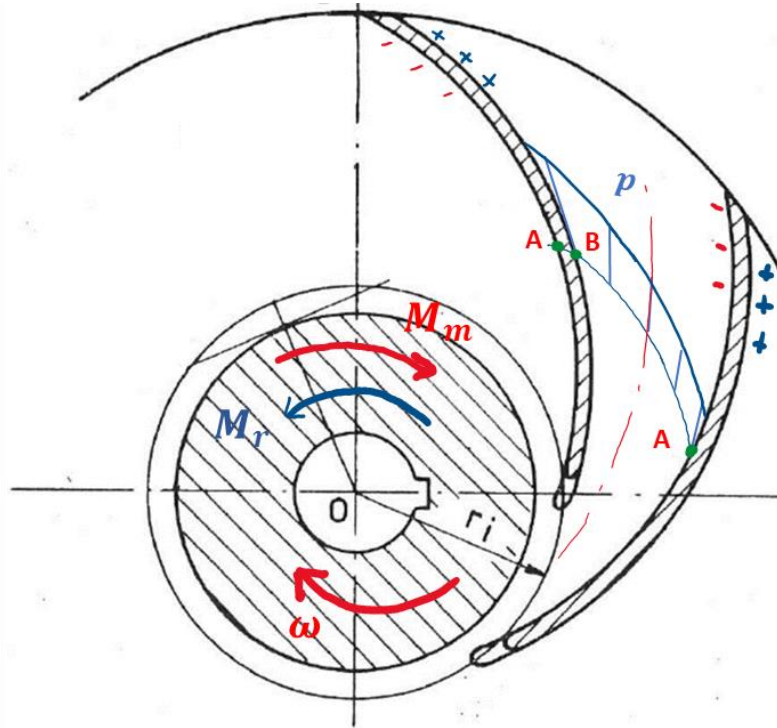
## MACCHINE OPERATRICI:

non agisce alcuna forza tangenziale, e dunque **nessun momento resistente** indotto dall'**azione** del **fluido** sulle pale per **equilibrare** il momento trasmesso alla girante di una pompa (o di un compressore) dal motore di azionamento

⇒ L'ipotesi di **assial-simmetria** della teoria euleriana è perciò IRREALISTICA!



# Critica alla teoria euleriana



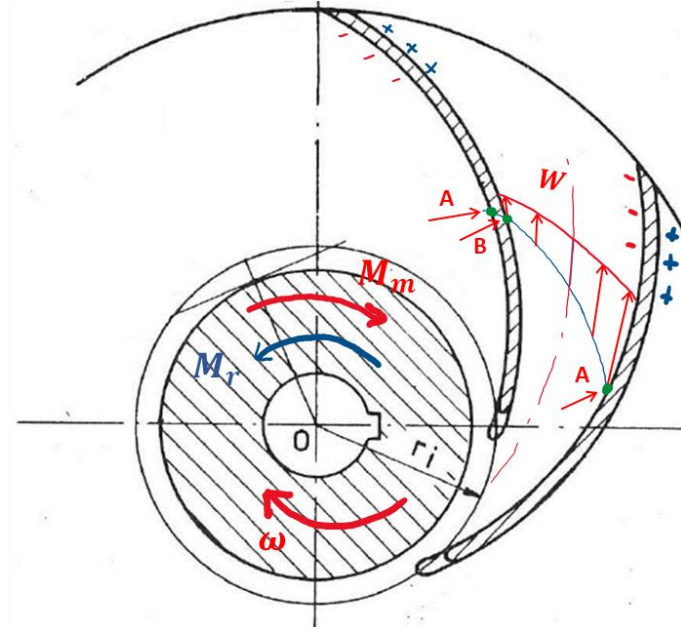
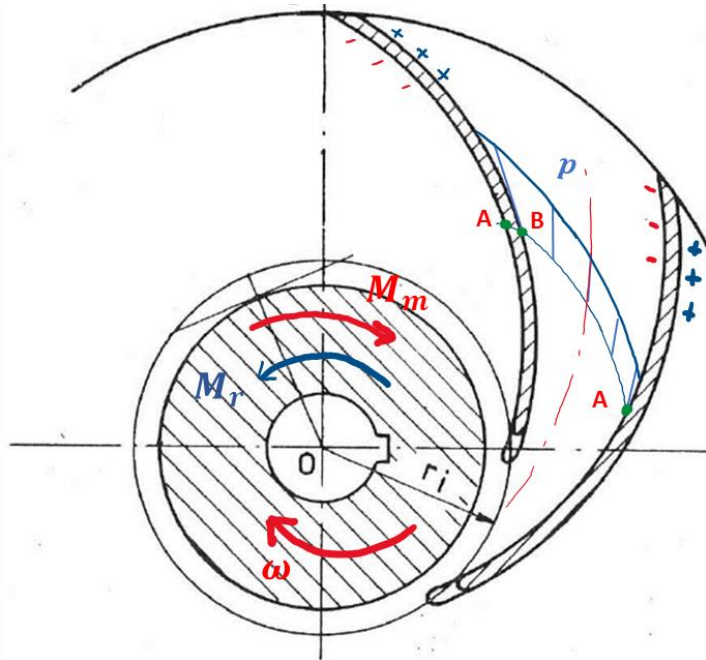
⇒ L'ipotesi di assialsimmetria  $\partial(\vec{W}, p, \dots) / \partial \vartheta = 0$  è perciò irrealistica!



Come correggerla??

- Il momento motore  $M_m$  potrà essere equilibrato dal momento di reazione  $M_r$  esercitato dal fluido sulle pale solo se ...  
... tra le due facce di una pala si stabilirà una differenza di pressione  $\Delta p = p_B - p_A > 0$

# Critica alla teoria euleriana



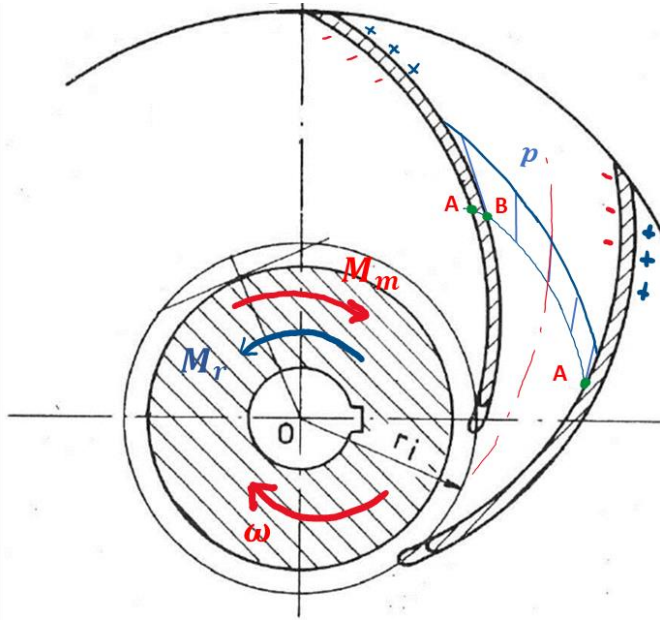
- Nell'ipotesi di **fluido perfetto**, nella girante:

$$\frac{p_w^0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{W^2 - U^2}{2} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_A}{\rho} + \frac{W_A^2 - \cancel{U_A^2}}{2} = \frac{p_B}{\rho} + \frac{W_B^2 - \cancel{U_B^2}}{2}$$

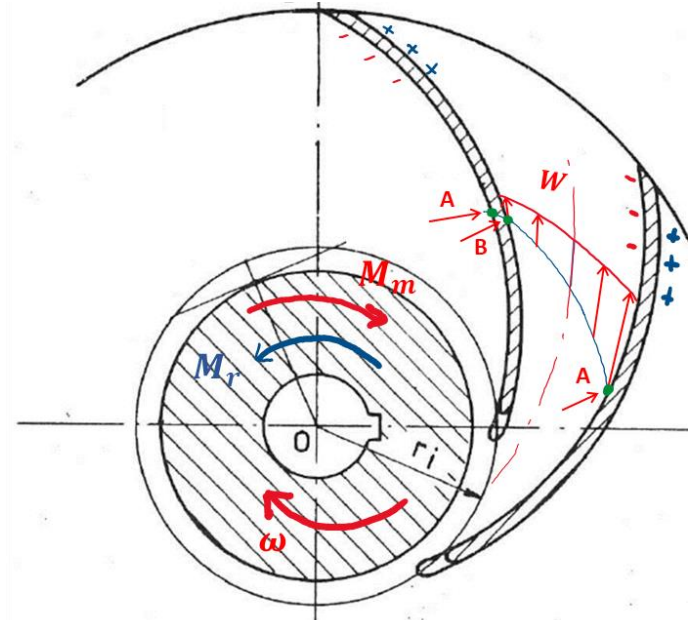
In direzione circonferenziale ( $r_A = r_B \Rightarrow U_A = U_B$ ), l'esistenza di un gradiente di pressione:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{p_B - p_A}{\rho} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta W^2}{2} = \frac{W_A^2 - W_B^2}{2} = \frac{p_B - p_A}{\rho} > 0$$

# Critica alla teoria euleriana



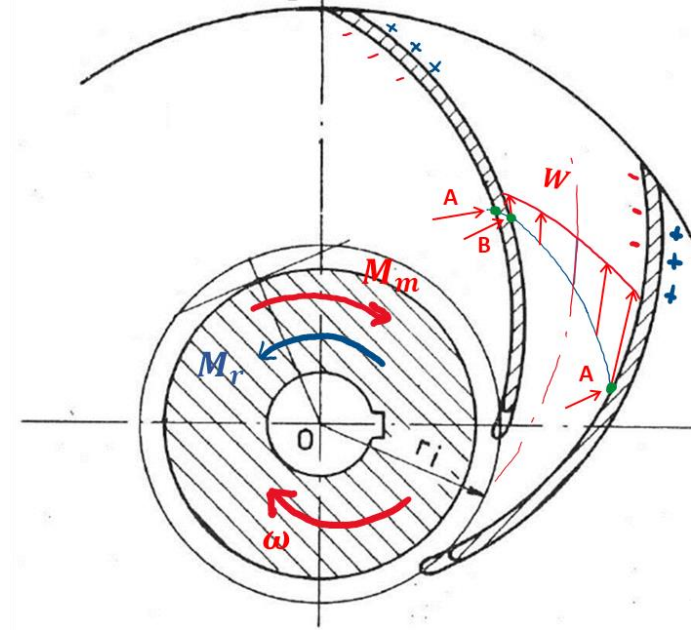
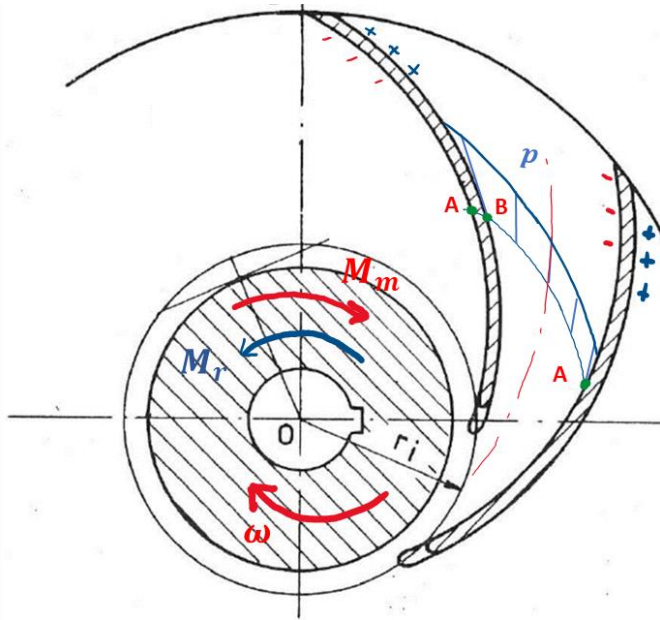
$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{(p_B - p_A)}{\rho}$$



$$\frac{\Delta W^2}{2} = \frac{(W_A^2 - W_B^2)}{2}$$

- Lo scambio di energia richiede un **gradiente circonferenziale** della pressione  $p$  e della velocità relativa  $W$
- Poiché  $\Delta p$  è legato alla forza e dunque al momento  $M_r$  che le  $Z$  pale della girante devono opporre al momento motore  $M_m$ , i valori di  $\Delta p$  e  $\Delta W^2$  sono legati al numero di pale  $Z$ , e **diminuiranno all'aumentare di  $Z$**

# Critica alla teoria euleriana



$$\Delta p / \rho = (p_B - p_A) / \rho$$

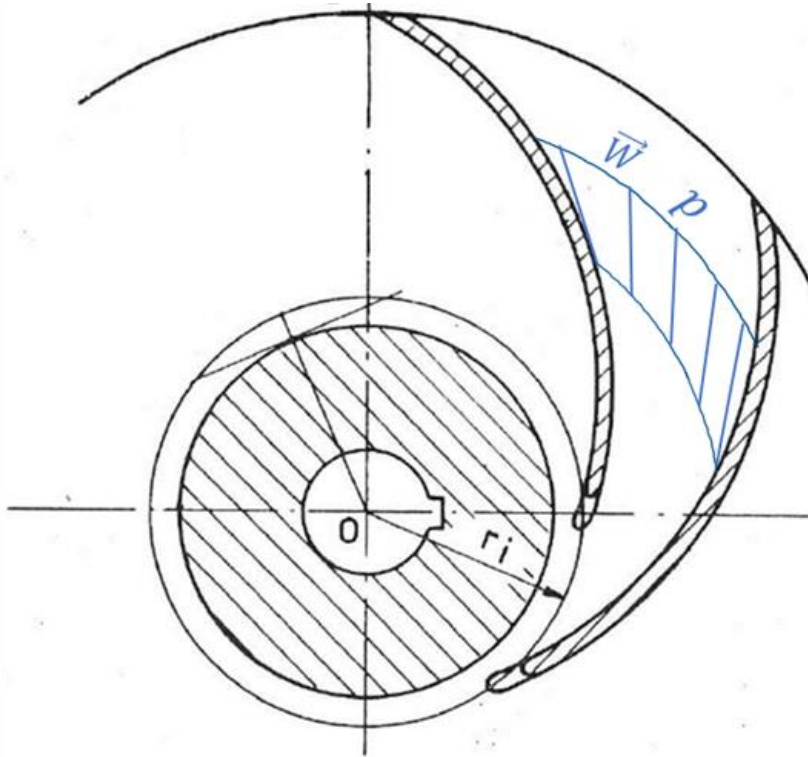
$$\Delta W^2 / 2 = (W_A^2 - W_B^2) / 2$$

⇒ Pertanto, la teoria euleriana ( $\partial(\vec{W}, p, \dots) / \partial \vartheta = 0$ ) trova la sua validazione quando il numero  $Z \rightarrow \infty$

Ipotesi di assial-simmetria



# Critica alla teoria euleriana

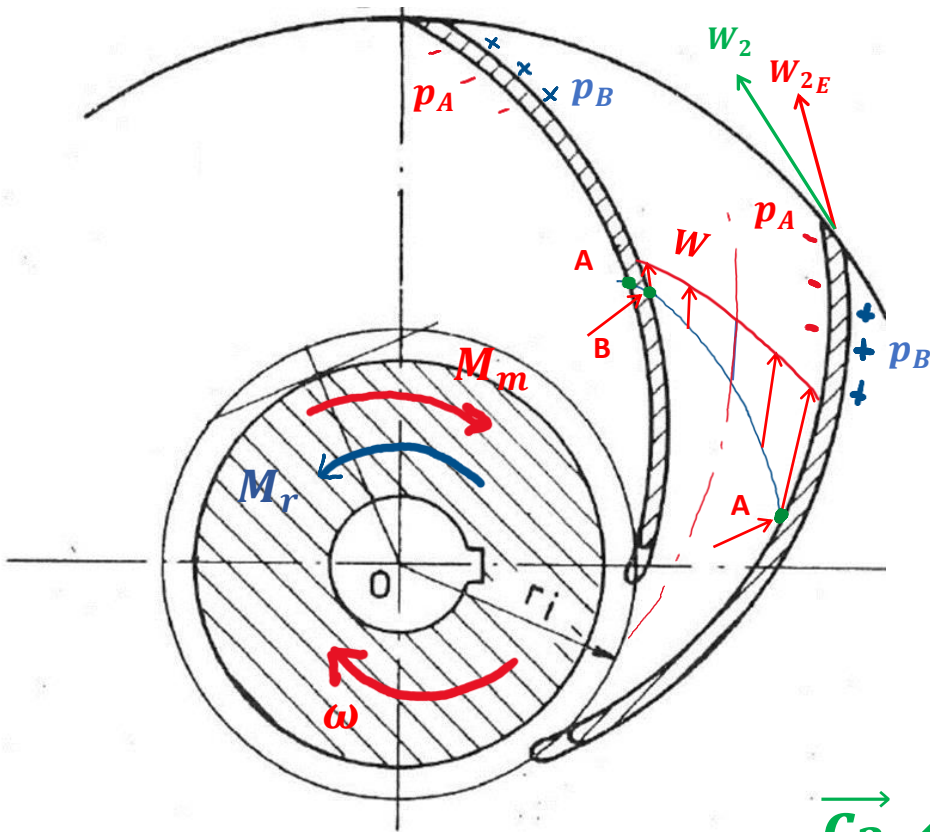


- C'è un'altra caratteristica dell'approccio euleriano che viene meno

L'ipotesi che il fluido segua perfettamente la geometria delle pale, ovvero che:

$$\beta_{fluido} = \beta_{pale}$$

# Critica alla teoria euleriana

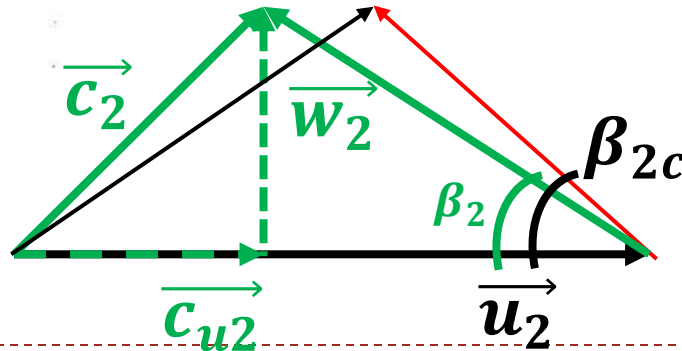


$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{p_B - p_A}{\rho}$$

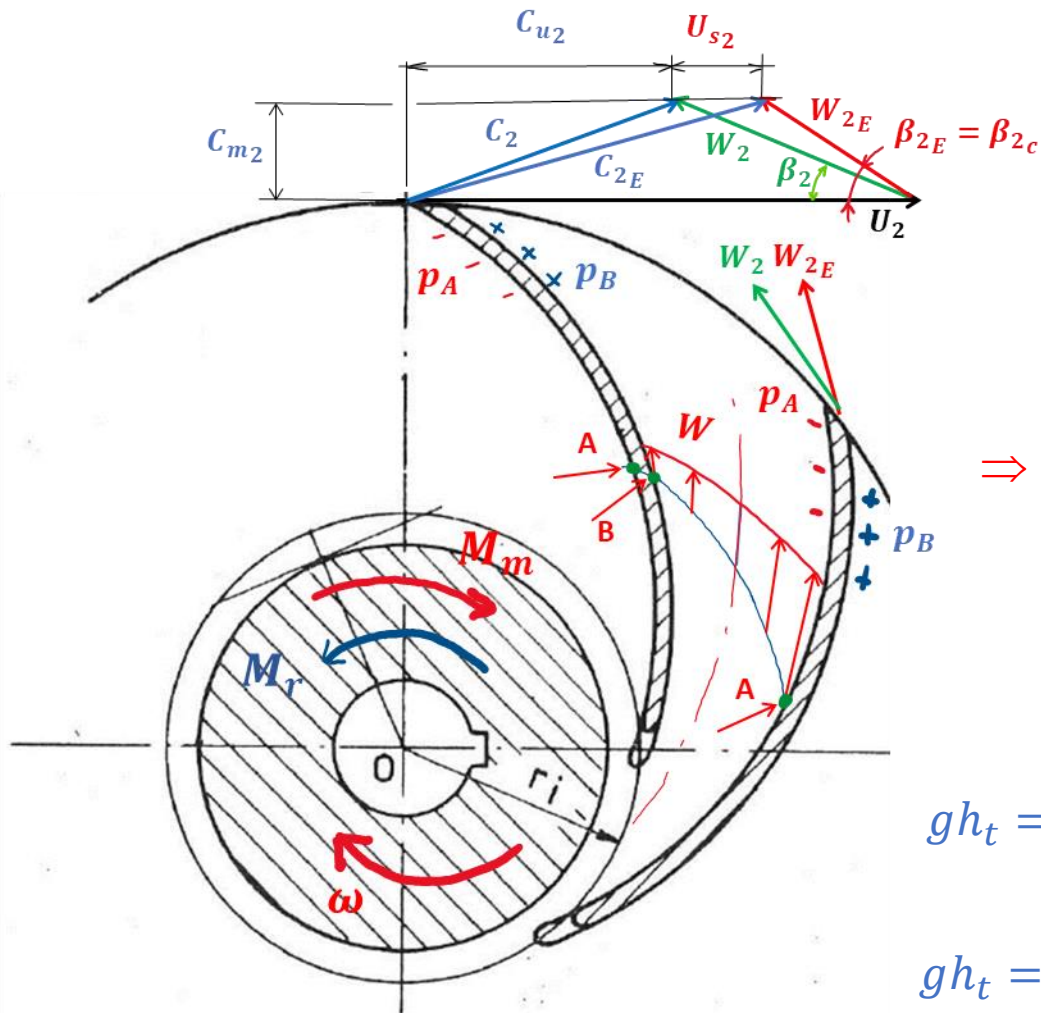
$$\frac{\Delta W^2}{2} = \frac{W_A^2 - W_B^2}{2}$$

⇒ Per effetto del gradiente circonferenziale di pressione  $\partial p / \partial \vartheta$ , la velocità relativa  $W_2$  all'uscita della girante viene deviata rispetto alla direzione definita dall'angolo  $\beta_{2c}$  delle pale

$$\beta_2 < \beta_{2c}$$



# Critica alla teoria euleriana



La velocità relativa  $W_2$  subisce uno scorrimento  $U_{s2}$  in direzione contraria a  $U_2$

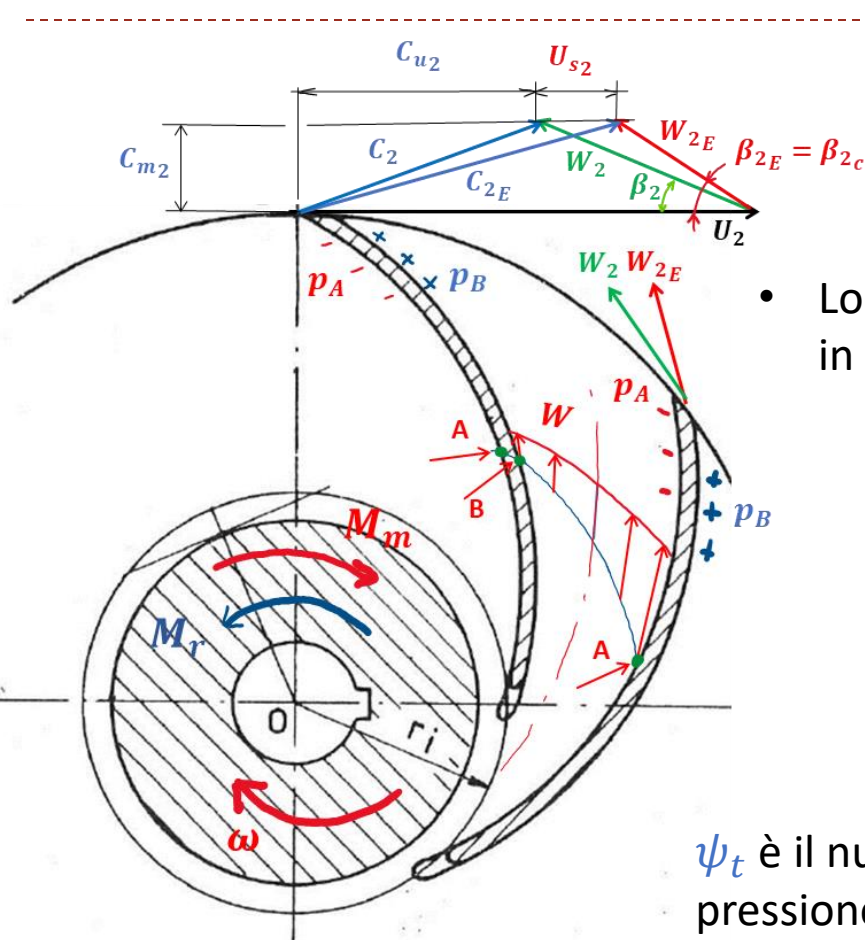
⇒ Ne consegue una riduzione della componente  $C_{u2}$  e quindi dello scambio di energia  $gh_t$  rispetto al valore euleriano  $gh_{t,E}$ :

$$gh_t = U_2 (C_{u2E} - U_{s2}) = U_2 C_{u2} < gh_{t,E}$$

$$gh_t = U_2 (U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2}) < gh_{t,E}$$



# Critica alla teoria euleriana



$$gh_t = U_2 (U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2})$$

Come quantificare?

- Lo scambio energetico si può rappresentare anche in forma adimensionale:

$$\frac{gh_t}{U_2^2} = \frac{U_2 (U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2})}{U_2^2}$$

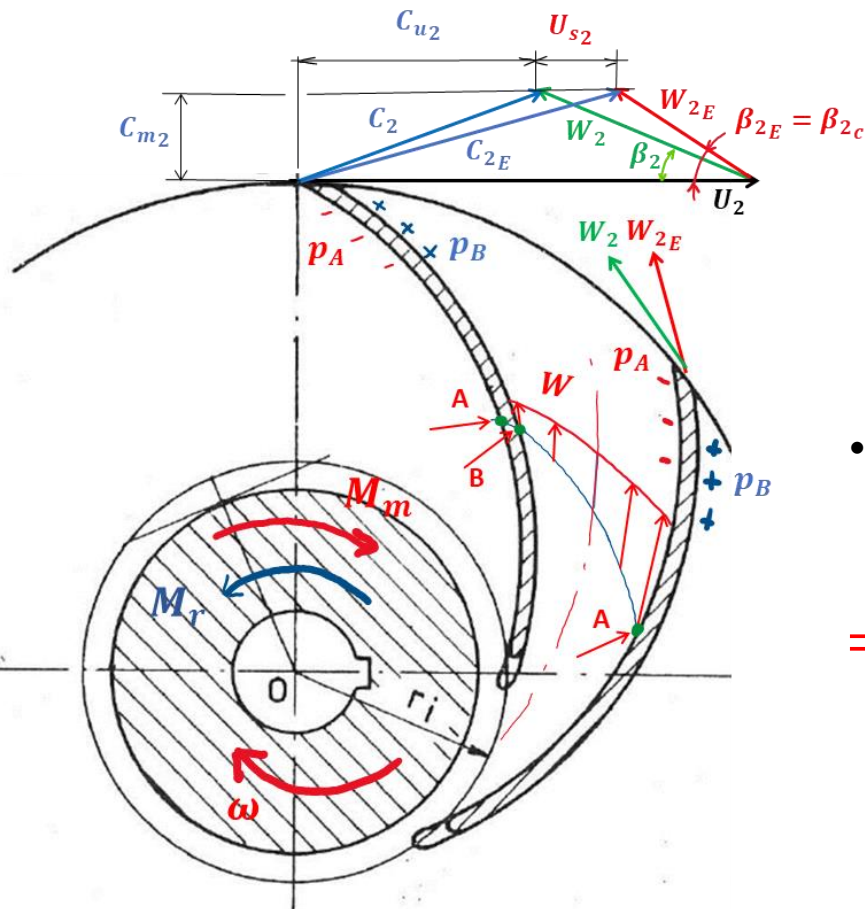
$$\frac{gh_t}{U_2^2} = 1 - \frac{C_{m2}}{U_2} \cot \beta_{2c} - \frac{U_{s2}}{U_2}$$

$\psi_t$  è il numero di pressione teorico

$\phi$  il numero di flusso

$$\psi_t = 1 - \phi \cot \beta_{2c} - \frac{U_{s2}}{U_2}$$

# Critica alla teoria euleriana



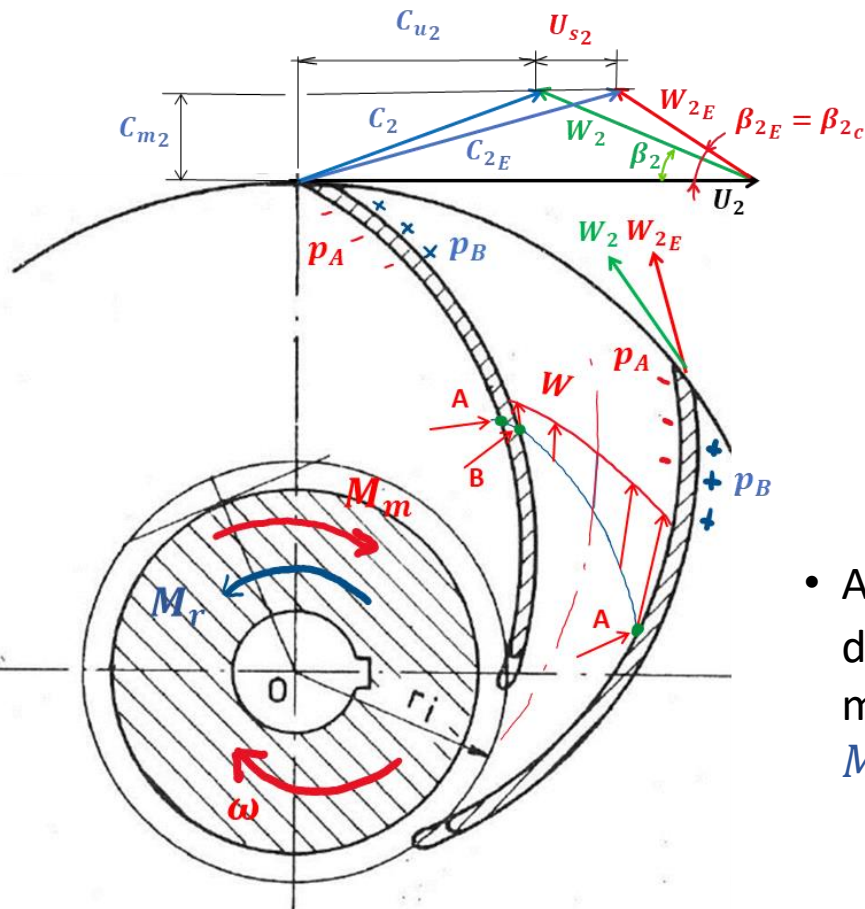
$$\psi_t = 1 - \phi \cot \beta_{2c} - \frac{U_{s2}}{U_2}$$

Da chi dipende il parametro correttivo della teoria euleriana?

- Dipenderà da tutti quei fattori che influenzano il gradiente di pressione circonferenziale  $\partial p / \partial \vartheta$
- ⇒ Quindi, dal numero di pale  $Z$ : minore è il numero di pale, maggiore sarà lo scarto  $\Delta\beta = \beta_{2c} - \beta_2$  e con esso  $U_{s2}/U_2$

$$\Rightarrow \frac{U_{s2}}{U_2} = f\left(\frac{1}{Z}\right)$$

# Critica alla teoria euleriana



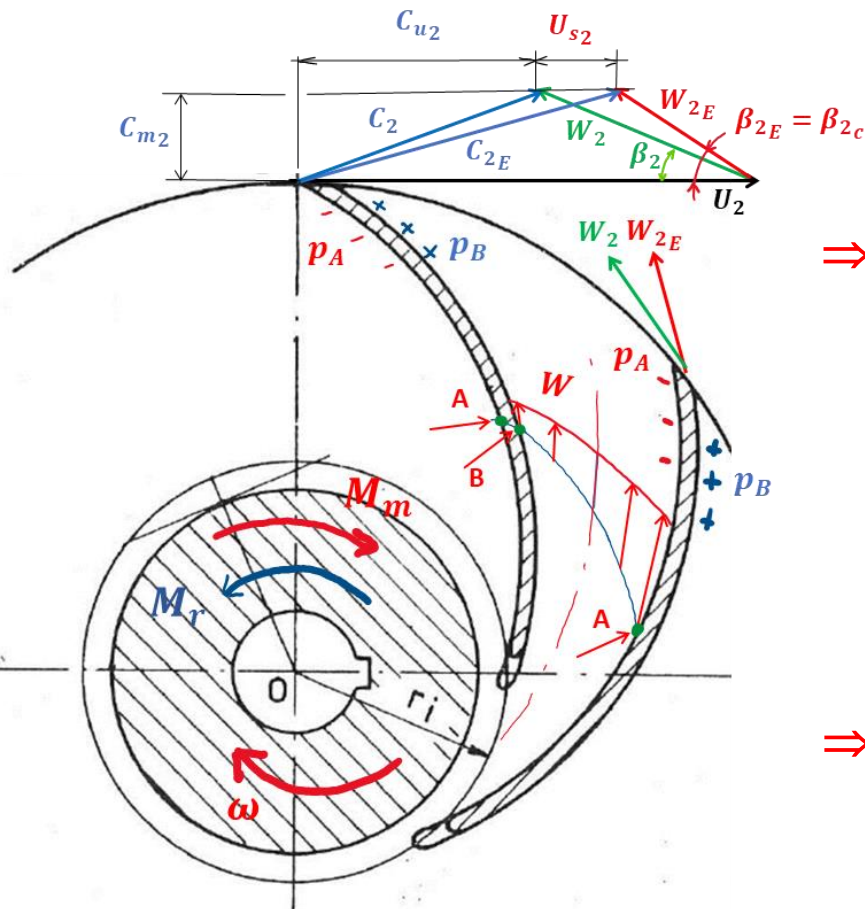
- Ma, a parità del numero di pale  $Z$ , il gradiente di pressione circonferenziale  $\partial p / \partial \vartheta$  dipende anche dal lavoro  $gh_t$  eseguito dalla girante, e quindi dall'angolo  $\beta_{2c}$  del bordo di fuga delle pale:

$$gh_t = U_2 (U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2})$$

- All'aumentare di  $\beta_{2c}$  aumenta il lavoro eseguito dalla girante, e con esso, a parità di portata, il momento motore  $M_m$  e il momento di reazione  $M_r$  e quindi il gradiente di pressione  $\partial p / \partial \vartheta$

⇒ La dipendenza dello scorrimento  $U_{s2}/U_2$  da  $\beta_{2c}$  è questa volta diretta:  $\frac{U_{s2}}{U_2} = f(\beta_{2c})$

# Critica alla teoria euleriana



$$\psi_t = \frac{gh_t}{U_2^2} = 1 - \phi \cot \beta_{2c} - \frac{U_{s2}}{U_2}$$

⇒ In conclusione, da queste essenziali considerazioni risulta che lo scorrimento della corrente relativa  $U_{s2}/U_2$  è **funzione diretta** dell'angolo  $\beta_{2c}$  e **funzione inversa** del numero di pale  $Z$  della girante:

$$\frac{U_{s2}}{U_2} = f\left(\beta_{2c}, \frac{1}{Z}\right)$$

⇒ Tutte le correlazioni suggerite per la determinazione di  $U_{s2}/U_2$  dovranno risultare coerenti con questo risultato

Deviazione della corrente relativa

# Equazione del moto: corrente assoluta

- Per determinare il fattore correttivo alla teoria monodimensionale, non si può prescindere dall'analisi del moto del fluido ed in particolare dalle equazioni che esprimono tale moto (**equazioni di Navier-Stokes**)
- Dalla seconda legge della dinamica:  $d\vec{F} = dm \vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{D\vec{C}}{dt} = \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{C^2}{2} \right) - \vec{C} \times \vec{\Omega} = \frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{d\vec{F}_s}{dm} + dm\vec{g} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} - \nabla(gz)$$

$\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{C} = \nabla \times \vec{C}$  è  
la **VORTICITA'** della  
corrente assoluta

$\frac{d\vec{F}_s}{dm}$  è la forza di **superficie** per  
unità di massa dovuta alle forze  
di pressione e di attrito

# Equazione del moto: corrente assoluta

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{C^2}{2} \right) - \vec{C} \times \vec{\Omega} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} - \nabla(gz)$$

- Si ottiene, riordinando e raggruppando i vari termini, la seguente equazione:

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} - \vec{C} \times \vec{\Omega} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{C^2}{2} + gz \right) + \vec{f}$$

la vorticità  $\vec{\Omega}$  esprime solo la **rotazione come corpo rigido** della particella

$E = \frac{p}{\rho} + \frac{C^2}{2} + gz$  è l'energia totale della corrente in J/kg

forza d'**attrito** riferita all'unità di massa del fluido

# Equazione del moto: corrente assoluta

$$\cancel{\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} - \vec{C} \times \vec{\Omega} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{C^2}{2} + gz \right) + \vec{f}}$$

- Nell'ipotesi di moto in regime permanente:

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} = 0$$

- Se ammettiamo il fluido aviscoso:

$$\vec{f} = 0$$

- Supponendo che il moto abbia origine da un ambiente ad energia totale costante  $E = \frac{p}{\rho} + \frac{C^2}{2} + gz$ , **ogni linea di corrente** che da esso origina trasporterà lo **stesso ammontare di energia** (eq. Bernoulli):

$$\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{C^2}{2} + gz \right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{C} \times \vec{\Omega} = 0$$



# Equazione del moto: corrente assoluta

$$\vec{C} \times \vec{\Omega} = 0$$

Possibili soluzioni

*Equazione valida nel sistema di riferimento assoluto a monte della girante, nell'ipotesi di moto stazionario e fluido aviscoso*

$$\vec{C} \equiv 0$$

$\vec{C}$  ovunque parallelo a  $\vec{\Omega}$  («vortice forzato»)

$\vec{\Omega} = 0$  («vortice libero») moto irrotazionale della **corrente assoluta**

# Equazione del moto: corrente relativa

- Le turbomacchine sono però costituite da un organo statorico e da un organo rotante con velocità angolare  $\omega$  costante attorno a un asse fisso
- Per gli **elementi statorici** l'equazione che ne regola il moto è quella già descritta in precedenza
- Per la **girante** l'equazione che ne regola il moto è quella già descritta in precedenza:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{C}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} - \nabla(gz)$$

Esprimendo  $\vec{a}$  in funzione di quella relativa  $\vec{a}_R$ , e dunque in funzione delle variazioni nel tempo della velocità relativa  $\vec{W}$  registrate dal sistema di riferimento che ruota in solido con la girante:

$$\vec{a} = \vec{a}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{W} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} - \nabla(gz)$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} - \vec{W} \times \vec{\Omega}_w + \nabla\left(\frac{W^2}{2}\right) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{W} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} - \nabla(gz)$$

# Deviazione della corrente relativa

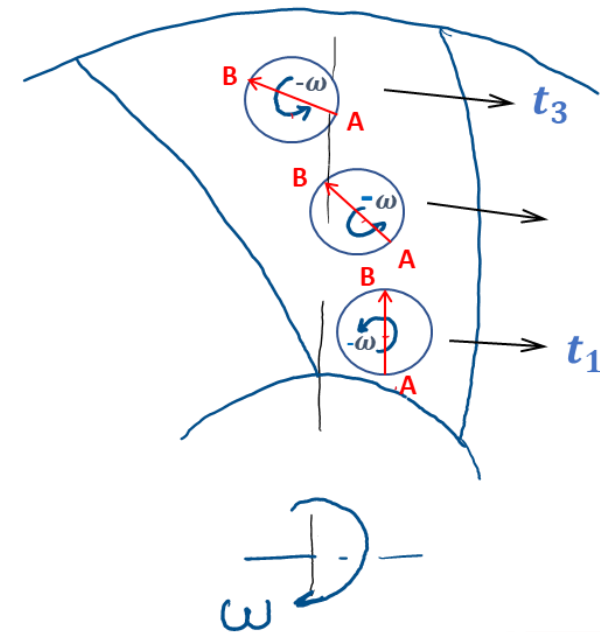
- Si può dimostrare che in ipotesi di moto stazionario e fluido aviscoso, l'equazione si semplifica e diventa:

$$\vec{W} \times (\vec{\Omega}_w + 2\vec{\omega}) = 0$$

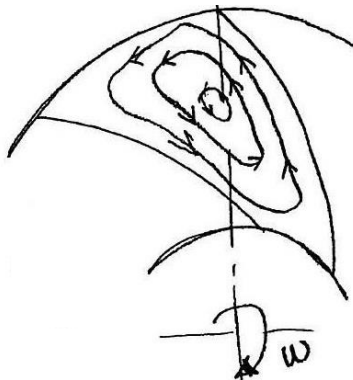
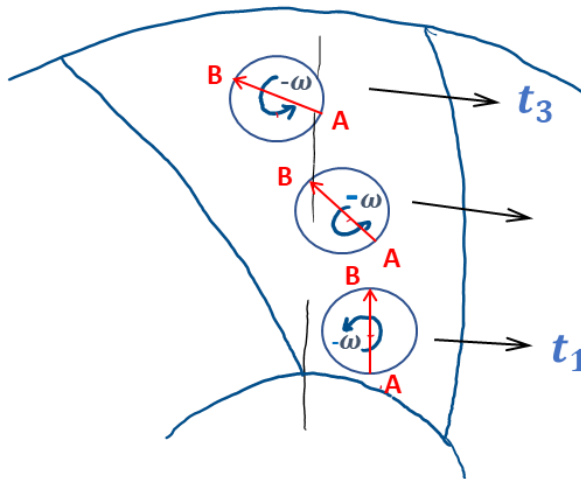
una soluzione fondamentale della quale è:

$$\vec{\Omega}_w + 2\vec{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Omega}_w = -2\vec{\omega}}$$

- ⇒ La corrente relativa non è irrotazionale ( $\vec{\Omega}_w \neq 0$ ), al più può essere a vorticità costante e pari a  $-2\vec{\omega}$
- ⇒ Le particelle della corrente relativa ruotano come corpo rigido attorno a un asse parallelo all'asse della girante con una velocità angolare  $-\vec{\omega}$ , uguale e contraria a quella della girante, mentre si muovono nel condotto interpolare con velocità  $\vec{W}$



# Deviazione della corrente relativa

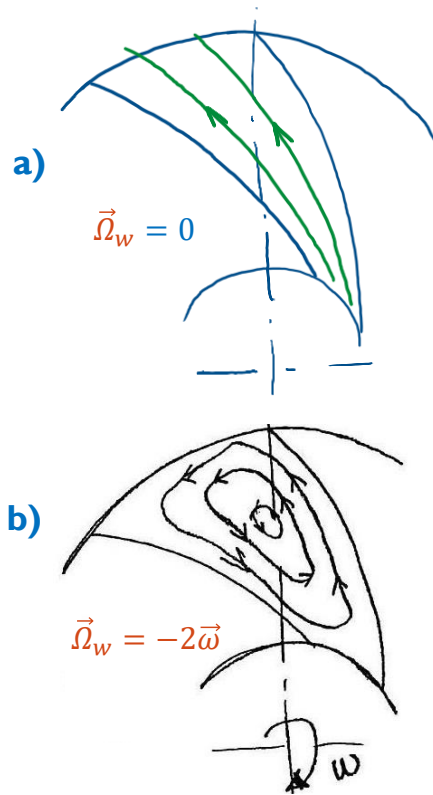


$$\vec{\Omega}_w = -2\vec{\omega}$$

Questa componente irrotazionale del moto del fluido nella girante non è considerata dalla teoria monodimensionale!!

- Secondo la teoria monodimensionale infatti, per  $Q_m = 0$  è  $\vec{W} = 0$  e dunque  $\vec{C} = \vec{U}$ , cosicché il fluido deve **ruotare in solido** con la girante
- In realtà, a portata nulla, poiché  $\vec{\Omega}_w = -2\vec{\omega}$ , il fluido è soggetto a una **ricircolazione** all'interno del condotto interpalare

# Deviazione della corrente relativa



Il moto attraverso la girante si può quindi pensare come il risultato della sovrapposizione di due moti:

- moto di trasporto legato alla portata  $Q_m$  a girante ferma ( $\omega = 0$ ) (fig. a)
- moto di ricircolazione per  $Q_m = 0$  con la girante in rotazione con velocità  $\omega$  (fig. b)

$$\vec{W} = \vec{W}_{\omega=0} Q + \vec{W}_{Q=0} \omega$$

La componente tangenziale della velocità assoluta  $C_u$  può perciò essere scritta nella forma:

$$C_u = U + W_u = U + (W_{u\omega=0} Q + W_{uQ=0} \omega)$$

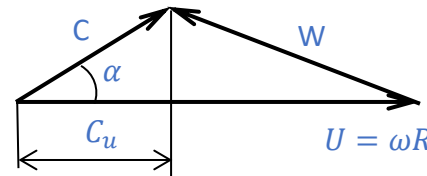


Fig. – a) Moto di trasporto; b) moto di ricircolazione.

# Deviazione della corrente relativa

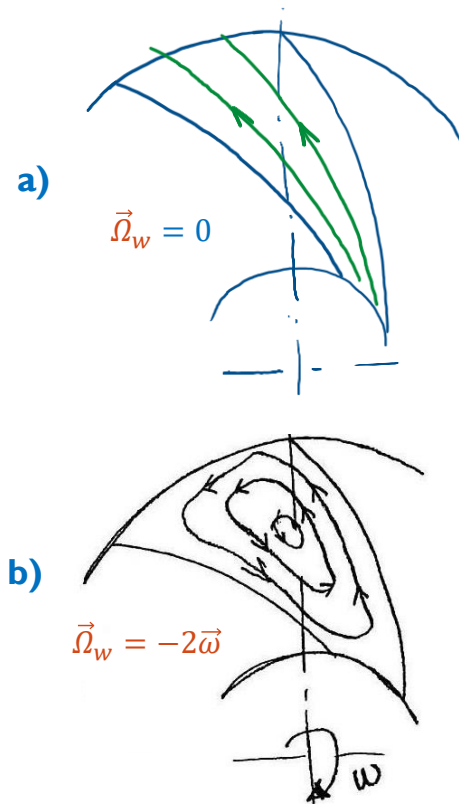


Fig. a) Moto di trasporto; b) moto di ricircolazione.

$$C_u = U + W_u = U + (W_{u\omega=0_Q} + W_{uQ=0_\omega})$$

- La componente  $W_{u\omega=0_Q}$  è legata alla geometria delle pale ed è esprimibile nella forma:

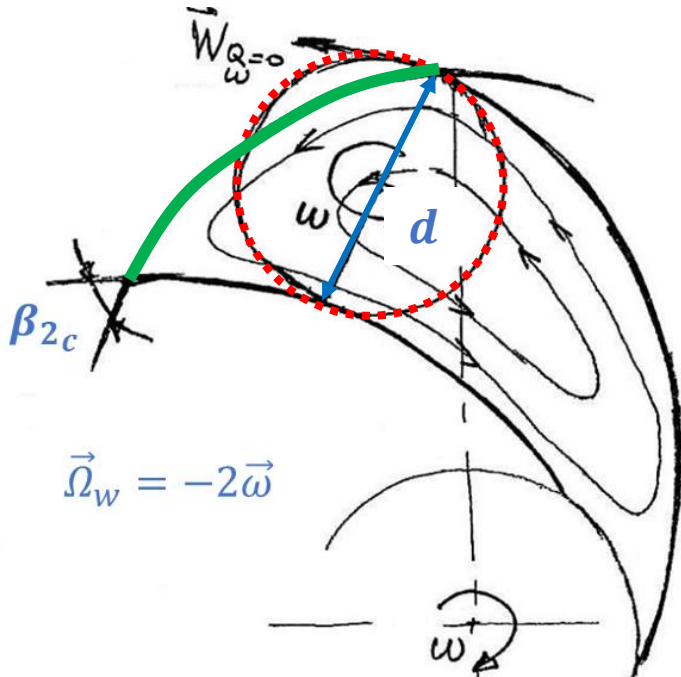
$$W_{u\omega=0_Q} = -C_{m2} \cot \beta_{2c}$$



$$C_{u2\omega=0_Q} = U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c}$$

E' la componente  $C_{u2}$  di cui teneva conto la teoria monodimensionale euleriana

# Approccio di Stodola



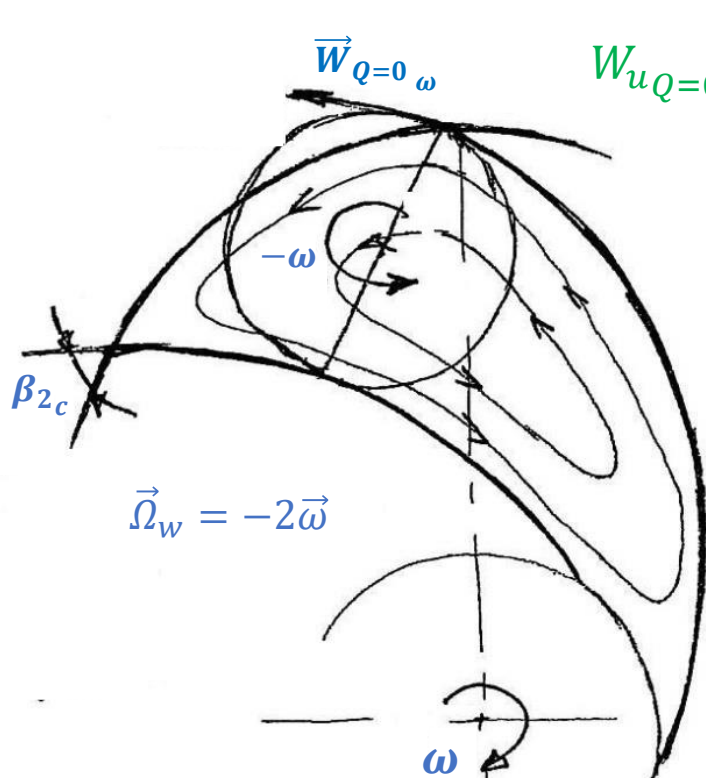
- La componente  $W_{uQ=0} \omega$  può essere stimata in prima approssimazione con l'approccio suggerito da Stodola
- Prendendo a riferimento il carattere **rotazionale** del campo di moto della corrente relativa, Stodola riassume la ricircolazione all'interno dei condotti interpalari con la **rotazione** di un **cilindro fluido** (una sorta di macro-particella) situato alla periferia della girante
- La velocità angolare del cilindretto è pari a  $-\omega$ , e ha diametro  $d$  pari a:

$$d = \frac{2\pi R_2}{Z} \sin \beta_{2c}$$

- La componente  $W_{uQ=0} \omega$  viene identificata con la velocità periferica del cilindretto:

$$\boxed{W_{uQ=0} \omega} \approx -\omega \frac{d}{2} = -\omega R_2 \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2c} = \boxed{-U_2 \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2c}} = U_{s2}$$

# Approccio di Stodola



$$W_{uQ=0\omega} \approx -\omega \frac{d}{2} = -\omega r_2 \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2c} = -U_2 \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2c} = -U_{s2}$$



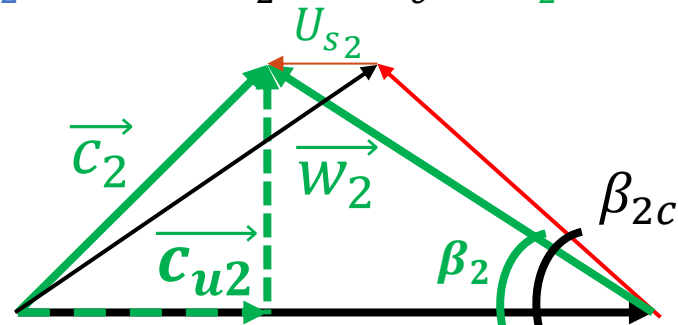
$$\frac{U_{s2}}{U_2} = \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2c}$$

secondo  
Stodola

La componente tangenziale della velocità assoluta  $C_{u2}$  all'uscita della girante (con  $k_\beta = 1$ ) è dunque:

$$C_{u2} = U_2 + W_u = U_2 + (W_{u2\omega=0Q} + W_{u2Q=0\omega})$$

$$C_{u2} = U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2}$$

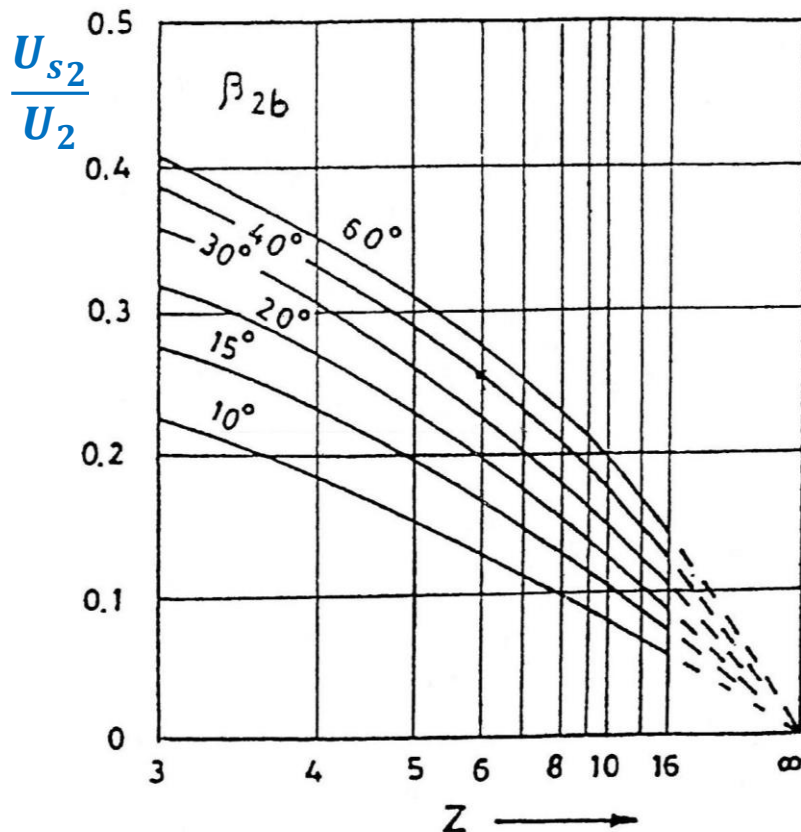




# Deviazione della corrente relativa

$$C_{u2} = U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2}$$

$$\left| \frac{U_{s2}}{U_2} \right| = \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2c}$$



- La correzione suggerita da **Stodola** non è molto accurata sotto l'aspetto quantitativo
- Più accurati i risultati ottenuti da **Busemann**, risolvendo in campo complesso con tecniche di rappresentazione conforme l'equazione differenziale  $\vec{\Omega}_w = -2\vec{\omega}$  per  $Q_m = 0$

$$\frac{R_2}{R_1} > \left( \frac{R_2}{R_1} \right)_{lim} = e^{\frac{2\pi}{Z} \sin \beta_{2c}}$$

# Deviazione della corrente relativa

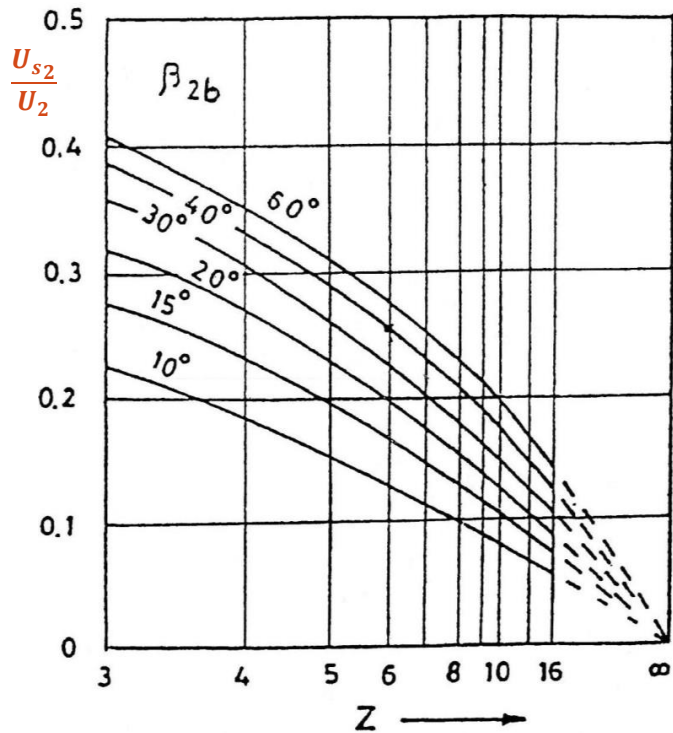


Fig. – Deviazione  $U_{s2}/U_2$  secondo Busemann.

$$C_{u2} = U_2 - C_{m2} \cot \beta_{2c} - U_{s2}$$

$$\frac{U_{s2}}{U_2} = \frac{\pi}{Z} \sin \beta_{2c} \quad \text{Stodola}$$

$$\frac{U_{s2}}{U_2} \rightarrow \text{Fig.} \quad \text{Busemann}$$

- In alternativa può essere adoperata la correlazione semi-empirica suggerita da Wiesner:

$$\frac{U_{s2}}{U_2} = \frac{\sqrt{\sin \beta_{2c}}}{Z^{0,7}}$$

valida per

$$\frac{r_2}{r_1} > e^{\frac{8,16 \sin \beta_{2c}}{Z}}$$

# Domande, Curiosità, Dubbi, Perplessità?

---

