



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



Dipartimento
di Ingegneria Industriale

La teoria euleriana: Esercizio

Corso di Macchine 1

Teoria euleriana – Esercizio: Prestazioni di una Pompa Centrifuga

Si consideri una pompa centrifuga che ruota alla velocità di rotazione $n = 2900 \text{ giri/min}$ e avente le seguenti caratteristiche geometriche:

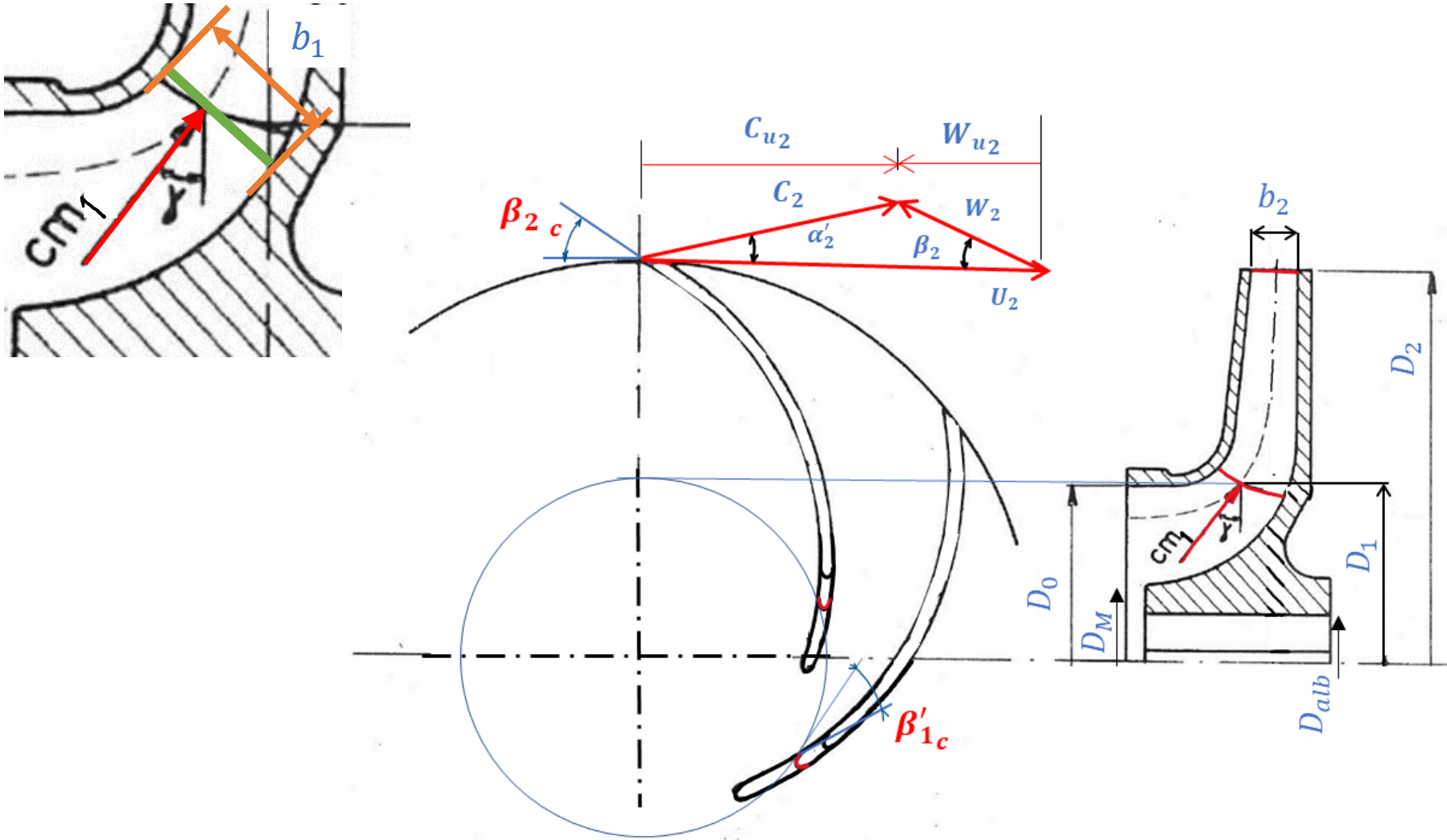
- Diametro della bocca di aspirazione: $D_0 = 65 \text{ mm}$
- Diametro del mozzo: $D_M = 28 \text{ mm}$
- Diametro dell'albero: $D_{alb} = 19 \text{ mm}$
- Diametro della sezione di ingresso della girante: $D_1 = 61 \text{ mm}$
- Larghezza della sezione di ingresso della girante: $b_1 = 14 \text{ mm}$
- Diametro della sezione di uscita della girante: $D_2 = 167 \text{ mm}$
- Larghezza della sezione di uscita della girante: $b_2 = 8 \text{ mm}$
- Spessore normale delle pale della girante valutato rispetto alla superficie di corrente: $S_n = 3 \text{ mm}$
- Angolo di inclinazione della linea di corrente rispetto al piano radiale nella sezione di ingresso: $\gamma = 47,5^\circ$
- Angolo costruttivo della palettatura all'ingresso sul piano radiale: $\beta'_{1c} = 21,8^\circ$
- Angolo costruttivo della palettatura all'uscita sul piano radiale $\beta'_{2c} = \beta_{2c} = 23,4^\circ$
- Numero delle pale: $Z = 7 \text{ pale}$
- Rendimento volumetrico ed idraulico: $\eta_v = 0.88$; $\eta_{id} = 0.82$

Si consideri una velocità tangenziale $C_{u1} = 0$ all'ingresso della girante.

Ricavare con approssimazioni monodimensionali le condizioni ottimali di esercizio Q_v e h



Teoria euleriana – Esercizio: Prestazioni di una Pompa Centrifuga



Dati:

$$D_0 = 65 \text{ mm}$$

$$D_M = 28 \text{ mm}$$

$$D_{alb} = 19 \text{ mm}$$

$$D_1 = 61 \text{ mm}$$

$$b_1 = 14 \text{ mm}$$

$$D_2 = 167 \text{ mm}$$

$$b_2 = 8 \text{ mm}$$

$$S_n = 3 \text{ mm}$$

$$\gamma = 47,5^\circ$$

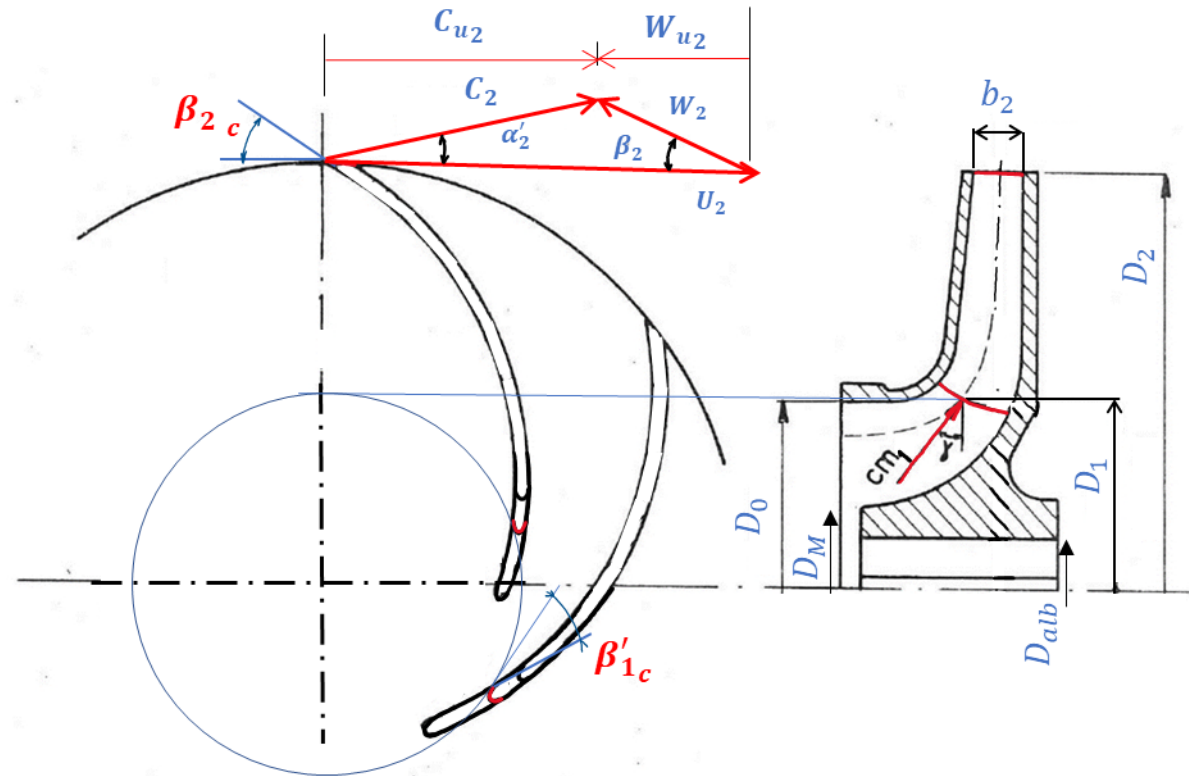
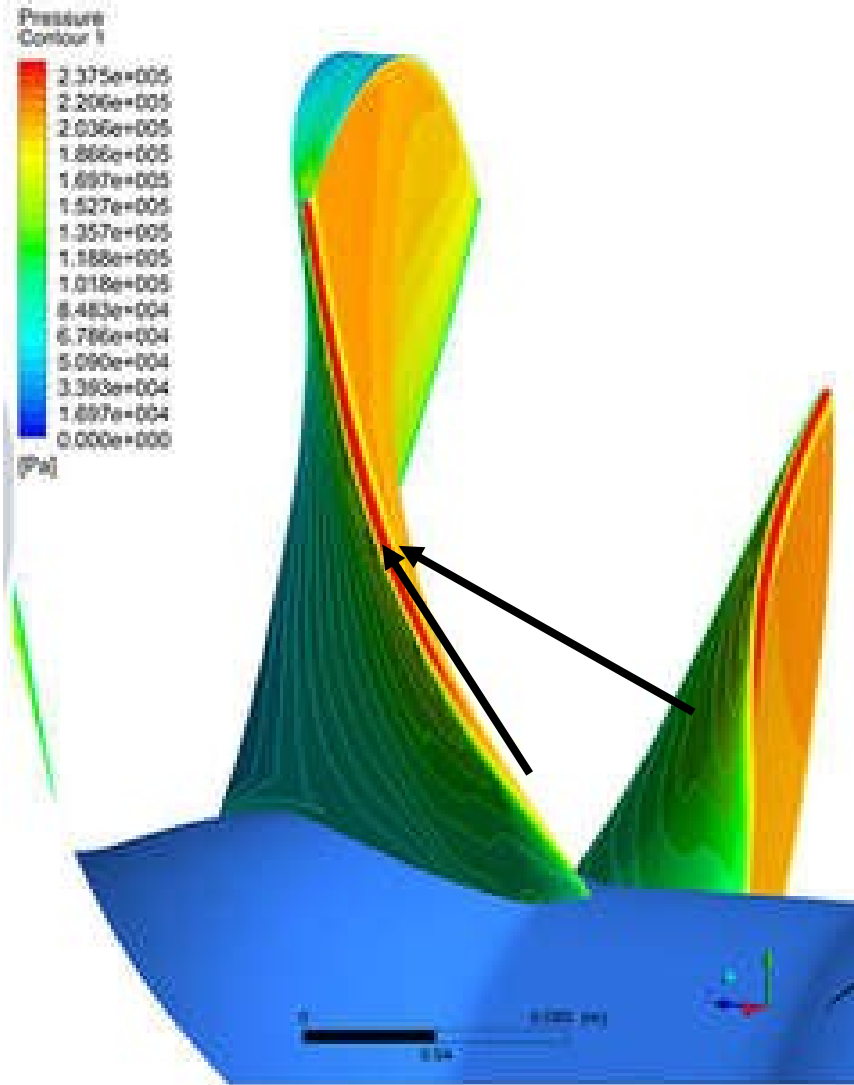
$$\beta'_{1c} = 21,8^\circ$$

$$\beta'_{2c} = \beta_{2c} = 23,4^\circ$$

$$n = 2900 \text{ giri/min}$$

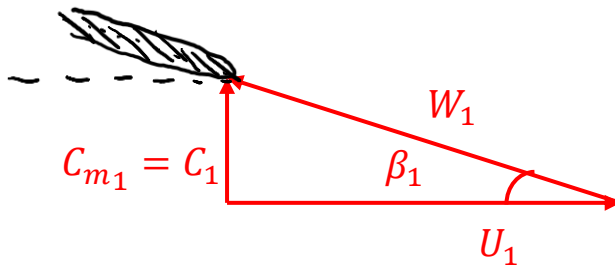
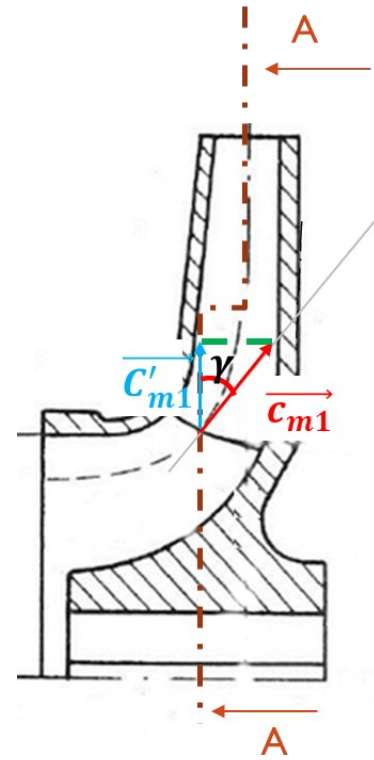
$$Z = 7 \text{ pale}$$

Teoria euleriana – Esercizio: Prestazioni di una Pompa Centrifuga



Le condizioni ottimali rappresentano quelle condizioni di deflusso in cui si riescono a minimizzare alcune perdite della macchina. Nello specifico si fa riferimento alle cosiddette «perdite di incidenza».

Turbomacchine – Teoria euleriana: condizioni ottimali di esercizio



- Per minimizzare le perdite di **incidenza** all'ingresso della girante, si assume che l'angolo di flusso della velocità relativa coincida con l'angolo costruttivo della palettatura all'ingresso: $\beta_1 = \beta_{1c}$

➔ $C_{m1\ opt} = U_1 \tan \beta_1 = U_1 \tan \beta_{1c}$

- Il **legame** tra gli **angoli** sulla vista **circonferenziale** e quelli sulla **superficie** di corrente è dato da:

$$\tan \beta_{1c} = \frac{\tan \beta'_{1c}}{\cos \gamma}$$

- Le condizioni ottimali di incidenza si otterranno per una velocità meridiana $C_{m1\ opt}$:

$$C_{m1\ opt} = U_1 \tan \beta_1 = U_1 \tan \beta_{1c}$$

Teoria euleriana – Esercizio: Prestazioni di una Pompa Centrifuga

SVOLGIMENTO

$$U_1 = \frac{2\pi n}{60} \cdot \frac{D_1}{2} = 9,263 \text{ m/s}$$

- Per $\beta'_{1c} = 21,8^\circ$ e $\gamma = 47,5^\circ$ si ottiene:

$$\tan \beta_{1c} = \frac{\tan \beta'_{1c}}{\cos \gamma} \rightarrow \beta_{1c} = 30,63^\circ$$

- Si ottiene, imponendo la condizione di incidenza ottimale $\beta_1 = \beta_{1c}$:

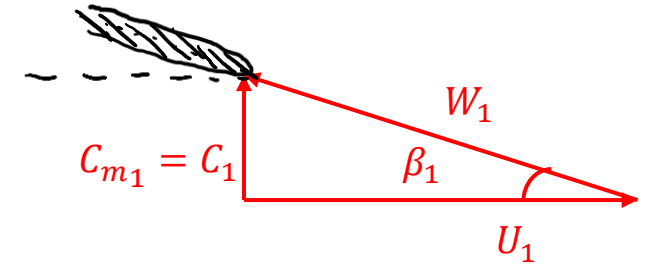
$$C_{m_{1,ott}} = U_1 \tan \beta_{1c} = 5,484 \text{ m/s}$$

- La portata volumetrica ottimale interna è quindi:

$$Q_{v,i_{opt}} = C_{m_{1,ott}} A_1 \text{ ?}$$

- Si potrebbe genericamente valutare la sezione A_1 come il cilindro equivalente di diametro D_1 e larghezza b_1 :

$$A_1 = \pi D_1 b_1$$

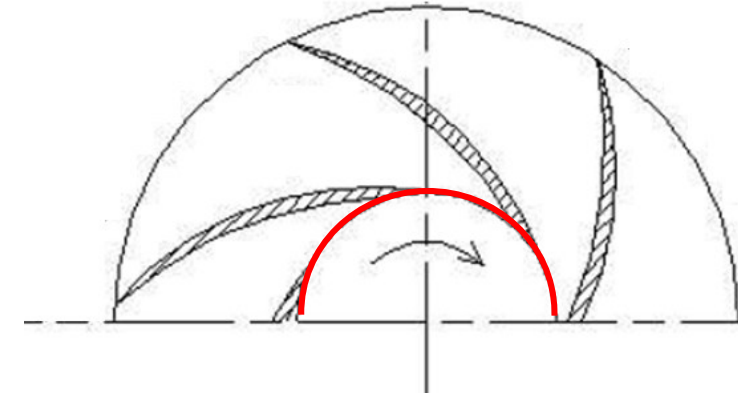
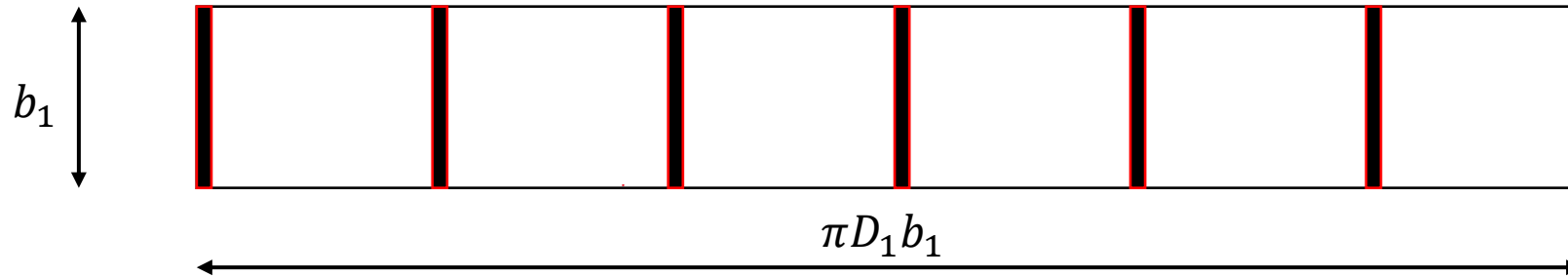


Questa formulazione però trascura lo spessore della palettatura e sovrastima la sezione effettiva di passaggio del fluido.

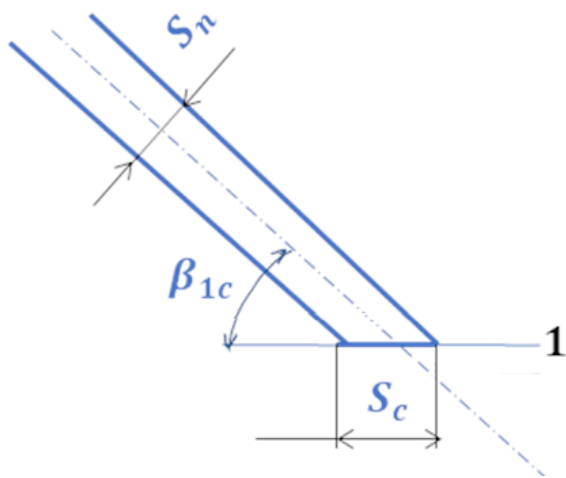
Teoria euleriana – Esercizio: Prestazioni di una Pompa Centrifuga

- Per determinare la portata ottimale, è necessario determinare l'area netta di attraversamento, ridotta dall'ostruzione delle pale:

$$A_1 = \pi D_1 b_1 - Z S_c b_1$$



- Per quanto riguarda lo **spessore circonferenziale** delle pale S_c , tale spessore può essere valutato facendo riferimento sia alla superficie di corrente sia piano circonferenziale
 - Il legame tra lo **spessore normale** S_n e quello **circonferenziale** S_c è il seguente:

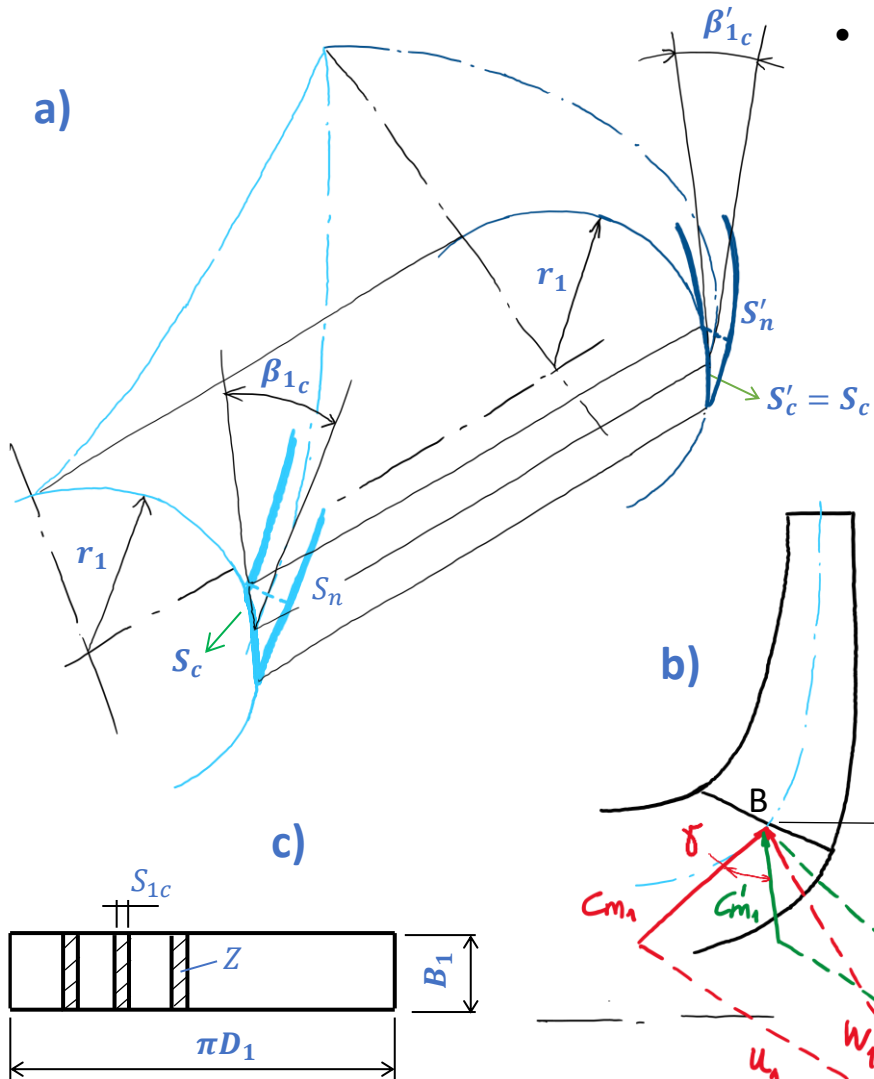


$$S_c = \frac{S_n}{\sin \beta_{1c}}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \pi D_1 b_1 - Z S_c b_1 = \pi D_1 b_1 \left(1 - \frac{Z S_n}{\pi D_1 \sin \beta_{1c}} \right) = \\ &= \pi D_1 b_1 \left(1 - \frac{Z S'_n}{\pi D_1 \sin \beta'_{1c}} \right) = \pi D_1 b_1 \xi_1 \end{aligned}$$

Coefficiente di ostruzione

Teoria euleriana – Esercizio: Prestazioni di una Pompa Centrifuga



- Area netta di attraversamento:

$$A_1 = \pi D_1 b_1 \left(1 - \frac{Z S'_n}{\pi D_1 \sin \beta'_{1c}} \right) = \pi D_1 b_1 \xi_1$$

$$\xi_1 = 1 - \frac{Z S'_n}{\pi D_1 \sin \beta'_{1c}} = 1 - \frac{7 \cdot 3}{\pi \cdot 61 \cdot \sin 21.8^\circ} = 0,7049$$

$$A_1 = \pi D_1 b_1 \xi_1 = \pi \cdot 0,061 \cdot 0,014 \cdot 0,7049 = 0,001891 \text{ m}^2$$

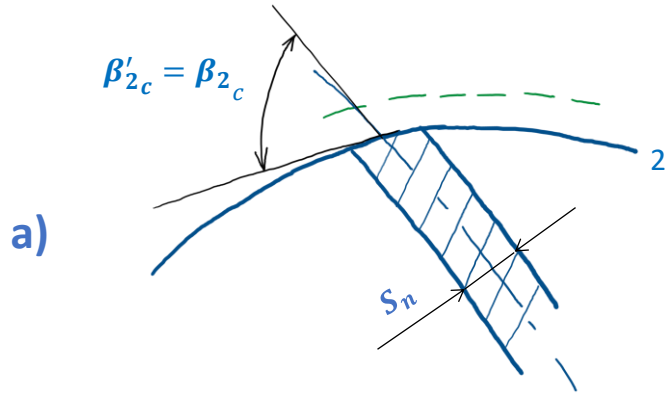
$$Q_{v,i,ott} = C_{m_1} \pi D_1 b_1 \xi_1 = 5,484 \cdot \pi \cdot 0,061 \cdot 0,014 \cdot 0,7049 = 0,010371 \text{ m}^3/\text{s} = 10,371 \text{ l/s}$$

- Dato $\eta_v = 0,88$ si trova che:

$$Q_{v,ott} = Q_{v,i,ott} \eta_v \approx 9,13 \text{ l/s}$$

per la portata volumetrica aspirata e poi convogliata alla mandata dalla pompa.

Teoria euleriana – Esercizio: Prestazioni di una Pompa Centrifuga



$$gh_{t,E} = U_2 C_{u2E}$$

- Per la teoria euleriana:

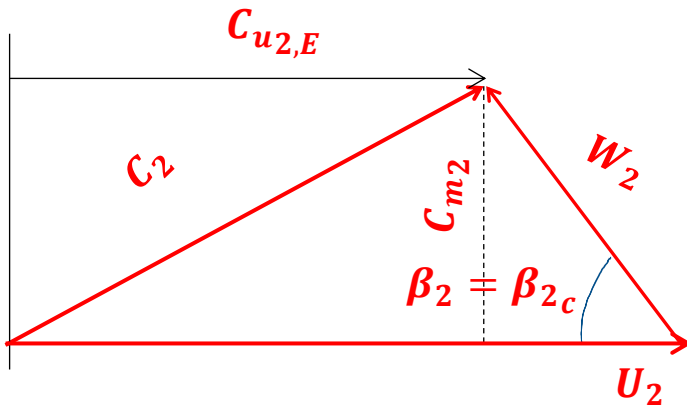
$$\beta_2 = \beta_{2c}$$

$$U_2 = \omega \frac{D_2}{2} = 25.358 \text{ m/s}$$

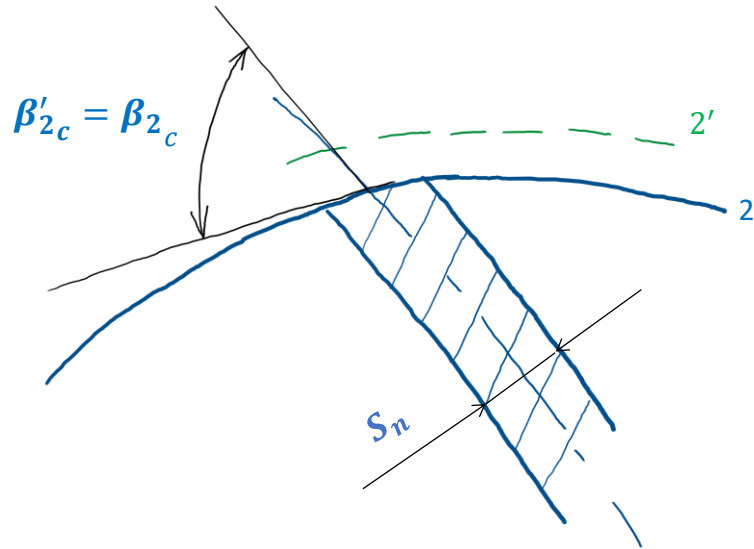
$$\xi_2 = 1 - \frac{z s_n}{\pi D_2 \sin \beta_{2c}} = 0,8992$$

$$C_{m_2} = \frac{Q_{v_{i \text{ opt}}}}{\pi D_2 b_2 \xi_2} = 2,748 \text{ m/s}$$

$$C_{u2E} = U_2 - C_{m_2} \cot \beta_{2c} = 19,108 \text{ m/s}$$



Teoria euleriana – Esercizio: Prestazioni di una Pompa Centrifuga



$$Q_{v_{i,ott}} = 10,371 \text{ l/s} \quad \beta_{2c} = 23,4^\circ \quad U_2 = 25,358 \text{ m/s}$$

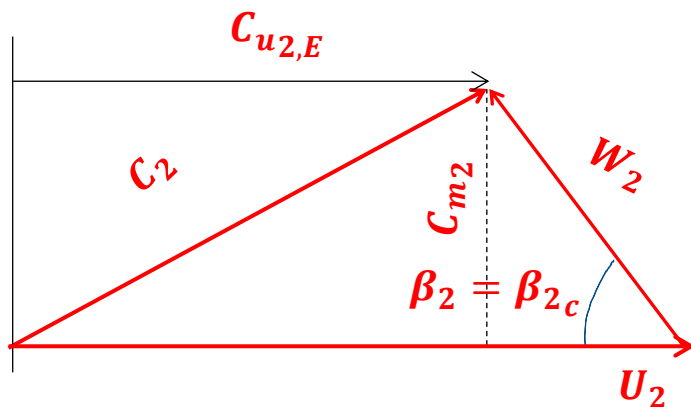
$$C_{m_2} = 2,748 \text{ m/s} \quad C_{u_{2E}} = 19,108 \text{ m/s}$$

$$\beta_{2c} = 23,4^\circ$$

- Il lavoro fatto dalla girante sull'unità di massa del fluido secondo la teoria euleriana vale:

$$gh_{t,E} = U_2 C_{u_{2E}} = 25,358 \cdot 19,108 = 484,54 \text{ J/kg}$$

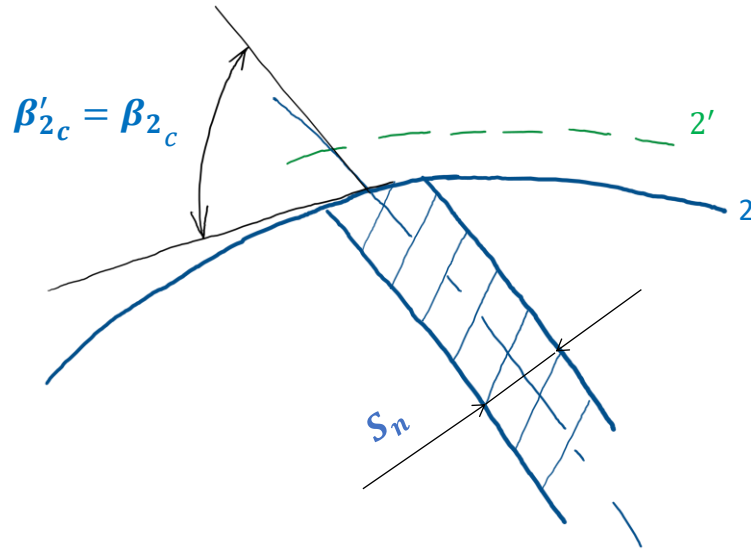
$$h_{t,E} = 49,91 \text{ m}$$



Attenzione: lavoro fatto dalla girante sull'unità di massa del fluido secondo la teoria euleriana!!!

E le perdite fluidodinamiche???

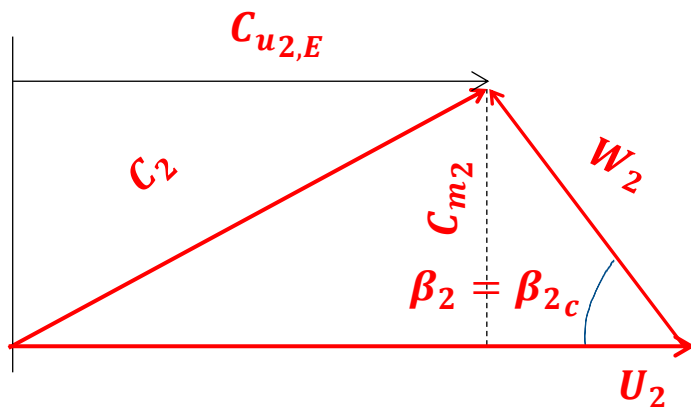
Teoria euleriana – Esercizio: Prestazioni di una Pompa Centrifuga



- L'energia acquisita dall'unità di massa di fluido gh_E è minore di $gh_{t,E}$:

$$gh_r = gh_{t,E} - gh_E$$

perdite fluidodinamiche interne alla pompa: perdite continue, perdite localizzate, perdite per distacchi della vena fluida dalle superficie palari, etc.



Teoria euleriana – Esercizio: Prestazioni di una Pompa Centrifuga

$$gh_{t,E} = 484,54 \text{ J/kg} \quad h_{t,E} = 49,91 \text{ m}$$

- Tali perdite sono riassunte nel rendimento idraulico:

$$\eta_{id} = \frac{gh_E}{gh_{t,E}} = 1 - \frac{gh_r}{gh_{t,E}}$$

- Dato $\eta_{id} = 0,82$, si ottiene per la prevalenza h_E della pompa :

$$h_E = \frac{p_e^0 - p_i^0}{\rho g} = \eta_{id} h_{t,E} = 0,82 \cdot 49,91 = 40,93 \text{ m}$$

- Nota la variazione di pressione totale $\frac{p_e^0 - p_i^0}{\rho g}$, si potrebbe andare a stimare l'incremento di pressione statica sfruttando la relazione:

$$\left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} \right)_{id} = \frac{p_{2c} - p_{1c}}{\rho} + \frac{p_{2w} - p_{1w}}{\rho} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2}$$

Teoria euleriana – Esercizio: Prestazioni di una Pompa Centrifuga

- Il contributo delle forze centrifughe è dato da:

$$\frac{p_{2c} - p_{1c}}{\rho} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} = 278,61 \quad J/kg$$

- Per il contributo delle decelerazione della corrente relativa, si devono determinare le velocità relative:

$$W_1 = \sqrt{C_{m1,ott}^2 + U_1^2} = 10,76 \quad m/s$$

$$W_{U2,E} = U_2 - C_{u2E} = 6,25$$

$$W_{2,E} = \sqrt{C_{m2,ott}^2 + W_{u2,E}^2} = 6,83 \quad m/s$$

$$\frac{p_{2w} - p_{1w}}{\rho} = \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} = 34,63 \quad J/kg$$

- Si ottiene

$$\left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} \right)_{id} = \frac{p_{2c} - p_{1c}}{\rho} + \frac{p_{2w} - p_{1w}}{\rho} = 313,24 \quad J/kg \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho g} \right)_{id} = 31,93 \text{ m}$$

Teoria euleriana – **Esercizio: Prestazioni di una Pompa Centrifuga**

- Si può quindi stimare che dell'incremento di pressione totale

$$h_E = \frac{p_e^0 - p_i^0}{\rho g} = 40,93 \text{ m}$$

Questo è il contributo che il fluido riceve in termini di pressione statica

$$\left(\frac{p_2 - p_1}{\rho g} \right)_{id} = 31,93 \text{ m}$$

- Si tratta di una sovrastima perché valutato in condizioni ideali