



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



Dipartimento
di Ingegneria Industriale

La teoria euleriana

Corso di Macchine 1

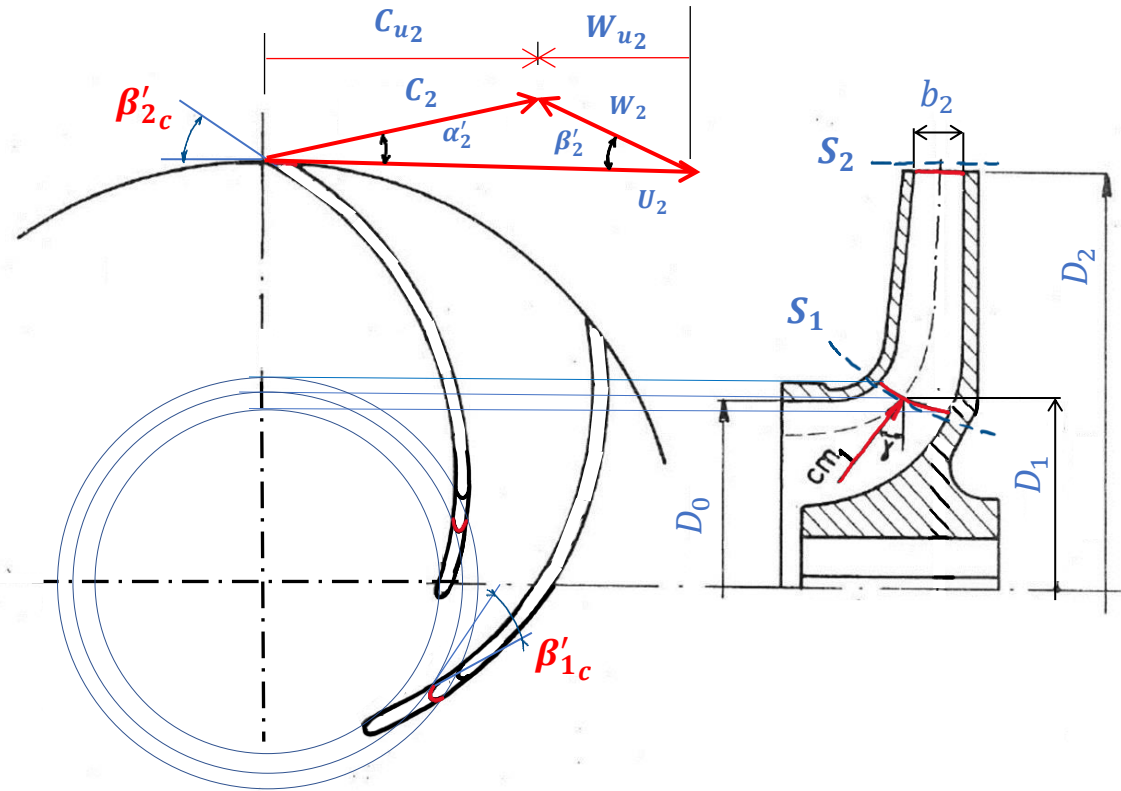
Agenda

- ▶ La teoria Euleriana
- ▶ Rappresentazione grafica
- ▶ Lo scambio energetico: i contributi



La teoria Euleriana

Teoria euleriana



- Per determinare il lavoro

$$\Delta H^0 = (R_2 C_{u2} - R_1 C_{u1}) \omega$$
 eseguito dalla girante di una turbomacchina operatrice su 1kg di fluido è necessario determinare la velocità tangenziale C_u del fluido su due sezioni: S_1 e S_2 , disposte immediatamente a monte e a valle della girante, rispettivamente.

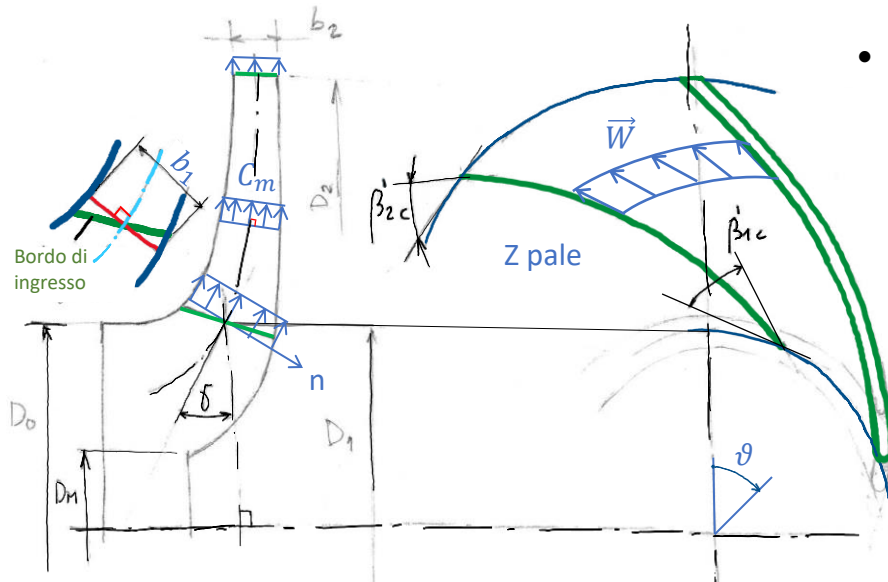
Le velocità tangenziali medie C_{u1} e C_{u2} derivano dalla composizione dei moti relativo e di trascinamento:

$$\vec{C} = \vec{W} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

riassunti dai rispettivi triangoli delle velocità.

- Non sono note a priori le velocità relative $\vec{W}_1$ e $\vec{W}_2$: occorre pertanto una teoria per descrivere il moto relativo $\vec{W}$.

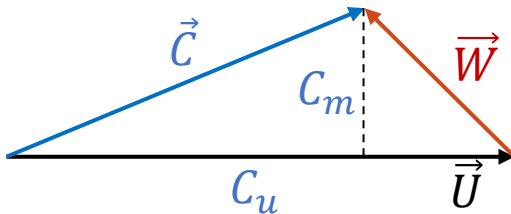
Teoria euleriana



- La **teoria euleriana** o monodimensionale suppone la velocità relativa $\vec{W}$, la pressione p e ogni altra grandezza inerente al deflusso, possano **variare solo** nella direzione del deflusso, e dunque ($W_m = C_m$):

$$\frac{\partial(W, p, T, \dots)}{\partial \vartheta} = 0 \quad \frac{\partial C_m}{\partial n} = 0$$

- La componente meridiana $W_m = C_m$ della velocità relativa o assoluta si deduce dunque dall'equazione della portata:



$$C_m = \frac{Q_m}{\rho A}$$

Ma come si valuta l'area??

Teoria euleriana

- All'uscita della girante la superficie di una pompa centrifuga è cilindrica:

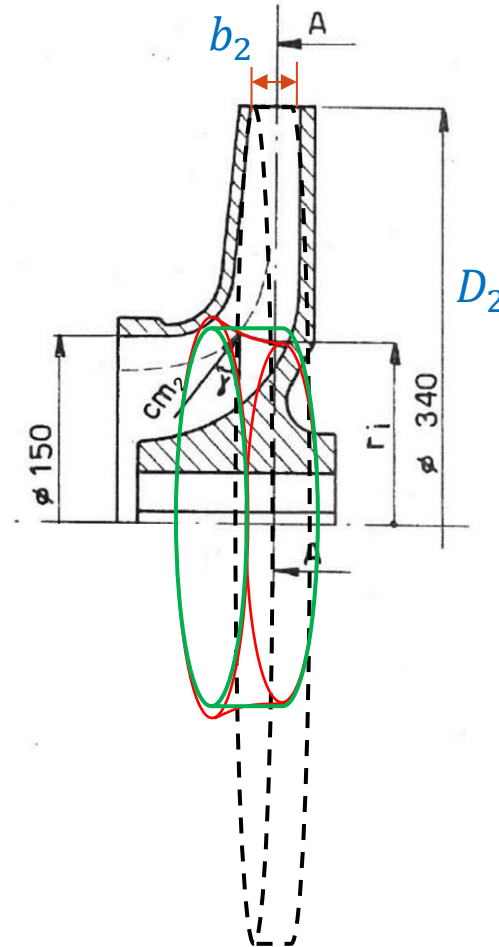
$$A_2 = \pi D_2 b_2$$

- Le altre superfici di attraversamento non sono perfettamente cilindriche ma vengono approssimate con superfici cilindriche:

$$A \approx \pi D b$$



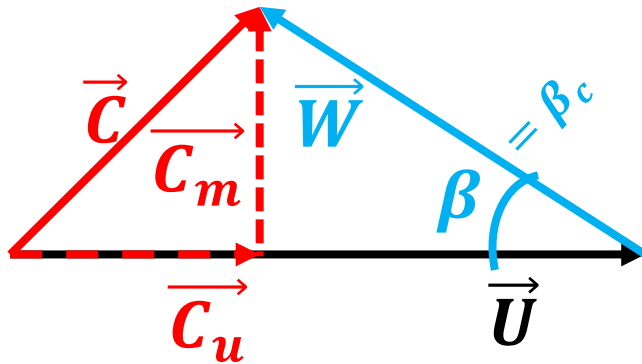
$$C_m = \frac{Q_m}{\rho A} = \frac{Q_m}{\rho \pi D b} = \frac{Q_v}{2 \pi r b}$$



Teoria euleriana

$$\Delta H^0 = (R_2 \underset{?}{C_{u2}} - R_1 \underset{?}{C_{u1}}) \omega$$

Secondo la teoria monodimensionale le pale guidano perfettamente il fluido → per una distanza radiale r dall'asse della girante l'angolo di inclinazione β della velocità relativa $\vec{W}$ rispetto alla direzione tangenziale è pari a quello locale della pala β_c , e si conserva lungo ϑ

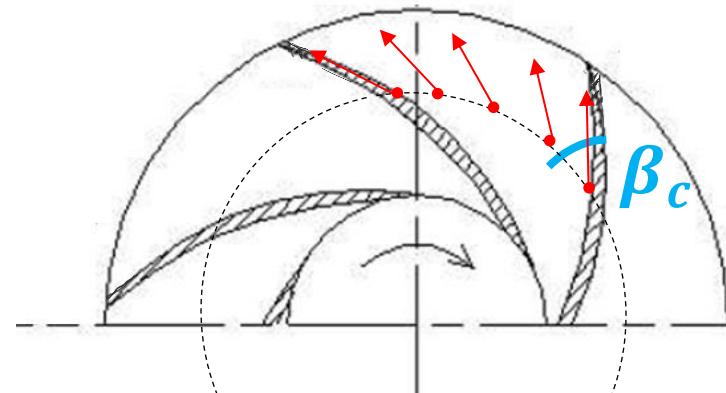


$$C_u = U - C_m \cot \beta_c$$

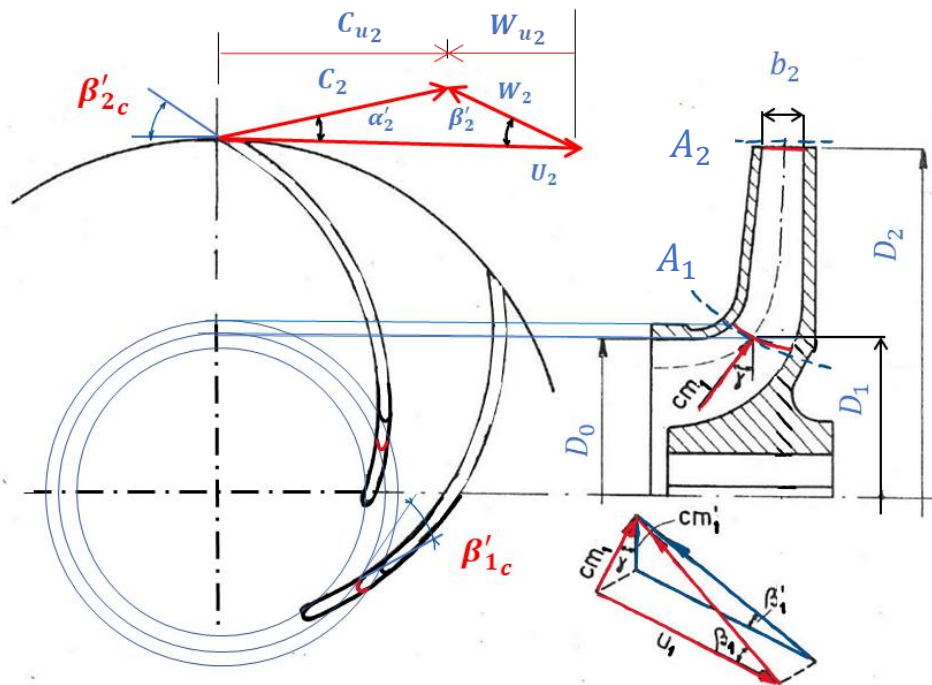


$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0$$



Teoria euleriana



$$\Delta H^0 = U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}$$

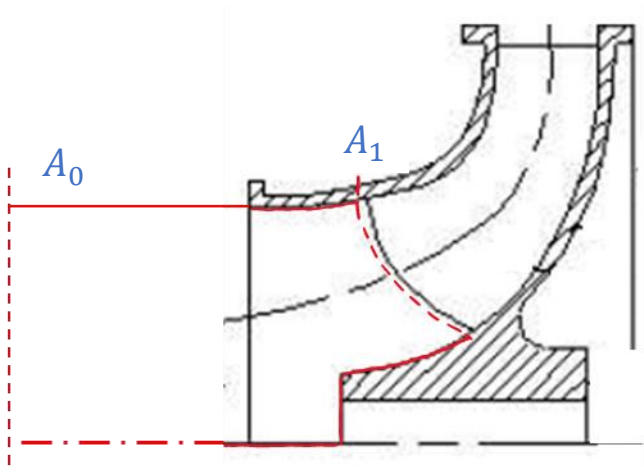
$$C_m = \frac{Q_m}{\rho \pi D b} = \frac{Q_v}{2 \pi r b}$$

$$C_u = U - C_m \cot \beta_c$$

- Per il computo dello scambio di energia ΔH^0 interessano le componenti tangenziali C_u della velocità assoluta nelle sezioni A_1 e A_2 , **immediatamente** a monte e valle della girante per poter isolare interamente il solo contributo della sola girante.
- La componente C_{u2} è determinabile tramite la geometria della girante.
- Per la C_{u1} è necessario determinare quella che avviene a monte della sezione A_1 in quanto non risente ancora dell'azione dinamica delle pale della girante



Scambio energetico euleriano



$$\Delta H^0 = U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}$$

- Si supponga che la corrente assoluta pervenga alla sezione A_0 con moto puramente assiale: $C_{u0} = 0$
- Si applichi il principio della variazione del momento della quantità di moto al volume di controllo $V_{A_0-A_1}$ compreso tra le sezioni A_0 e A_1 .

$$M_{A_0-A_1} = \overline{R_1 C_{u1}} - \overline{R_0 C_{u0}}$$

- Se $C_{u0} = 0$ sulla sezione A_0 :

$$M_{A_0-A_1} = \overline{R_1 C_{u1}} - \overline{R_0 C_{u0}} = \overline{R_1 C_{u1}}$$

- Ma $M_{A_0-A_1} = 0$, non essendoci nulla nel volume di controllo $V_{A_0-A_1}$ che possa interagire con il fluido $\Rightarrow C_{u1} = 0$.

Esempio Numerico



Rappresentazione Grafica

Scambio energetico euleriano

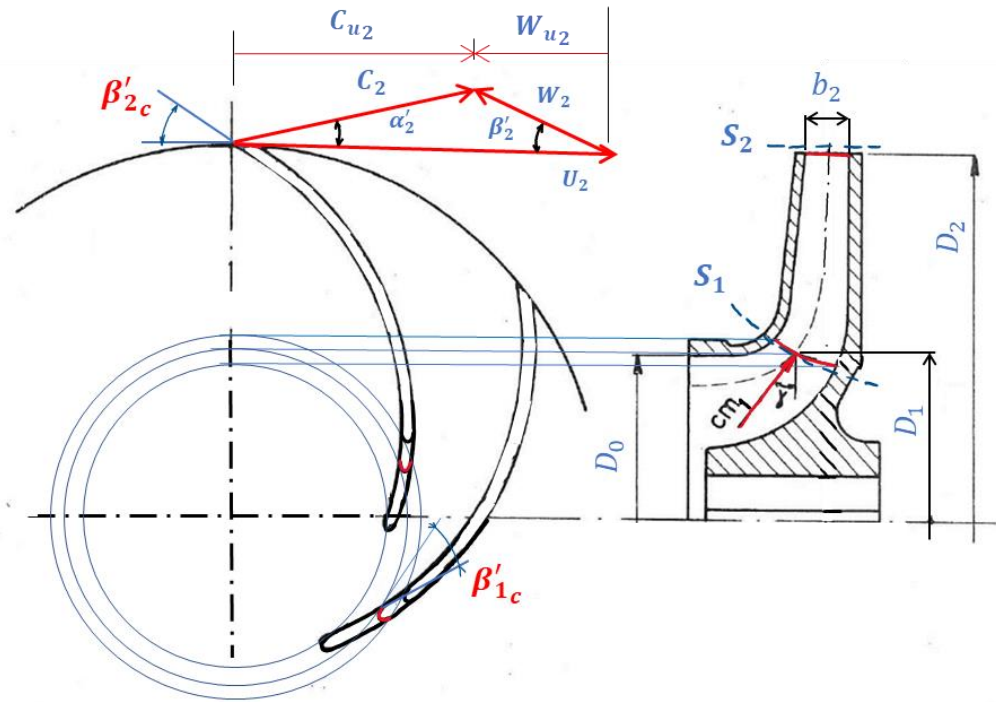
- L'approccio monodimensionale viene anche adoperato:
 - in sede di progetto per il **dimensionamento preliminare** delle giranti più semplici, quelle con pale a semplice curvatura.
 - per **stimare** in prima approssimazione le **condizioni ottimali** di esercizio di una macchina

$$\Delta H^0 = U_2 C_{u2} \quad C_u = U - C_m \cot \beta_c$$

Occorrono però alcune **attenzioni**, legate primariamente alle convenzioni adottate per la **rappresentazione grafica** della girante.



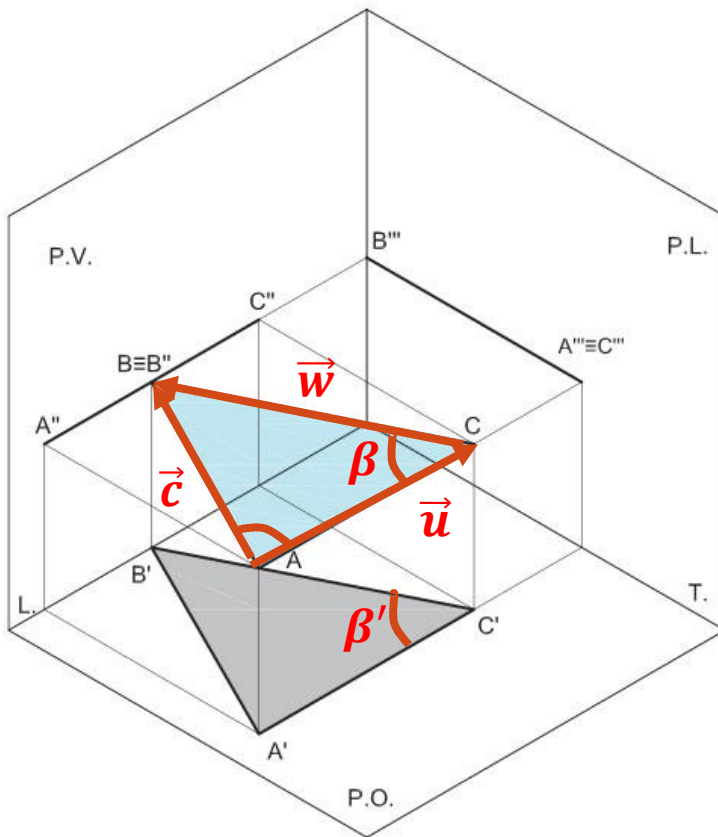
I **triangoli delle velocità** vengono valutati con riferimento alla **linea di flusso** e quindi su piani che possono essere inclinati rispetto ai piani di proiezione riportati nei disegni





Proiezioni ortogonali di figure piane

- Se la proiezione ortogonale riguarda una figura su **un piano parallelo** al piano di proiezione, la figura proiettata è uguale alla figura piana non proiettata

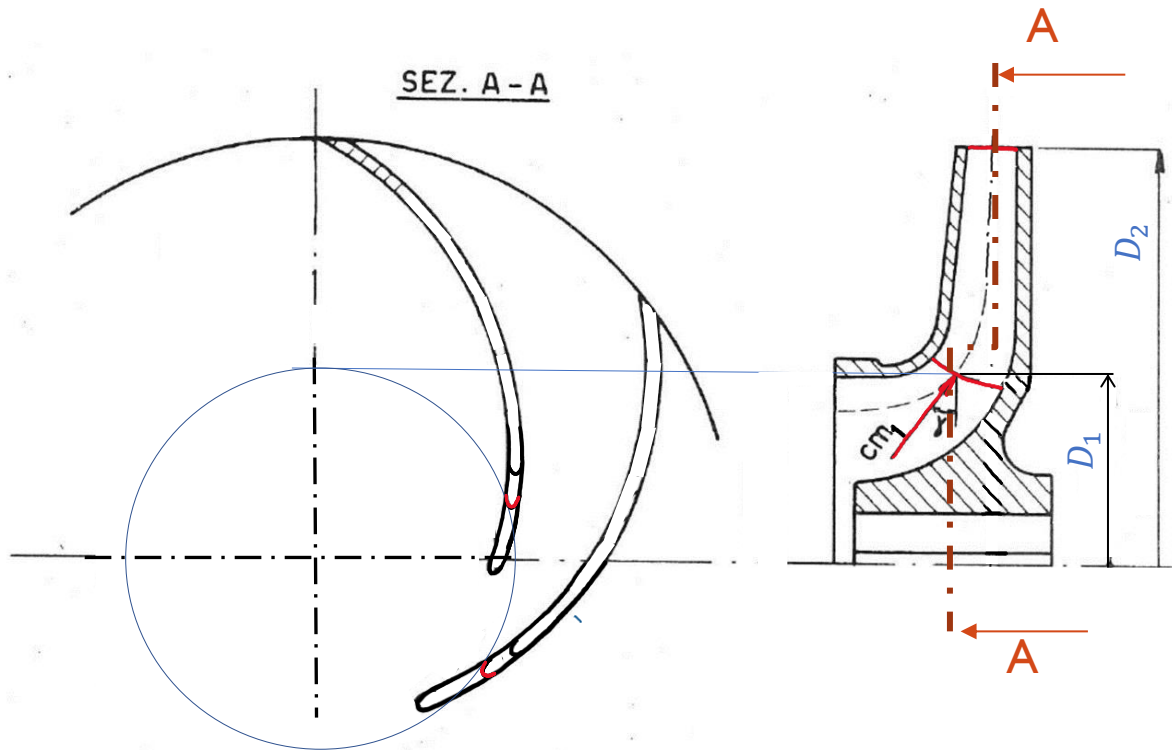


- In questo caso, il triangolo delle velocità mantiene **inalterate le sue caratteristiche geometriche** (lati e angoli)

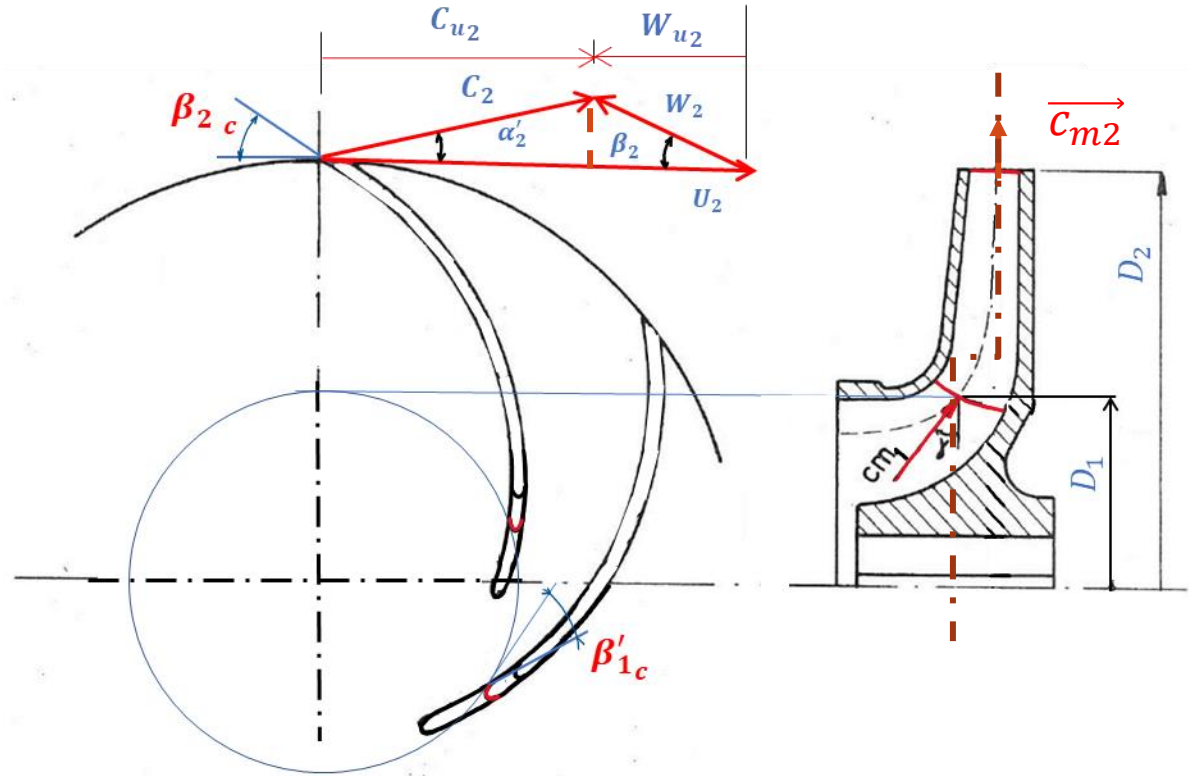
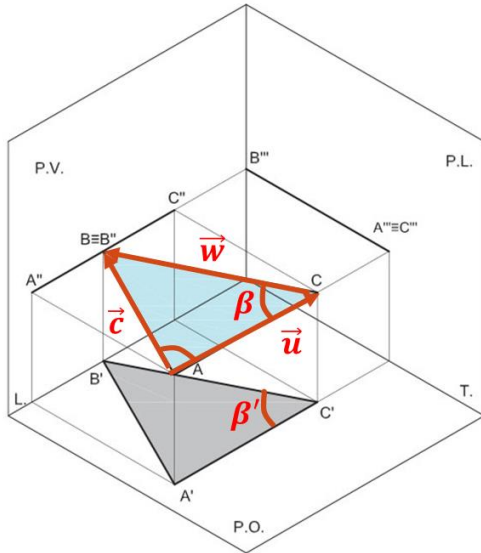
$$\beta = \beta'$$

Proiezioni ortogonali di figure piane

- Questo accade sulla sezione di uscita della girante



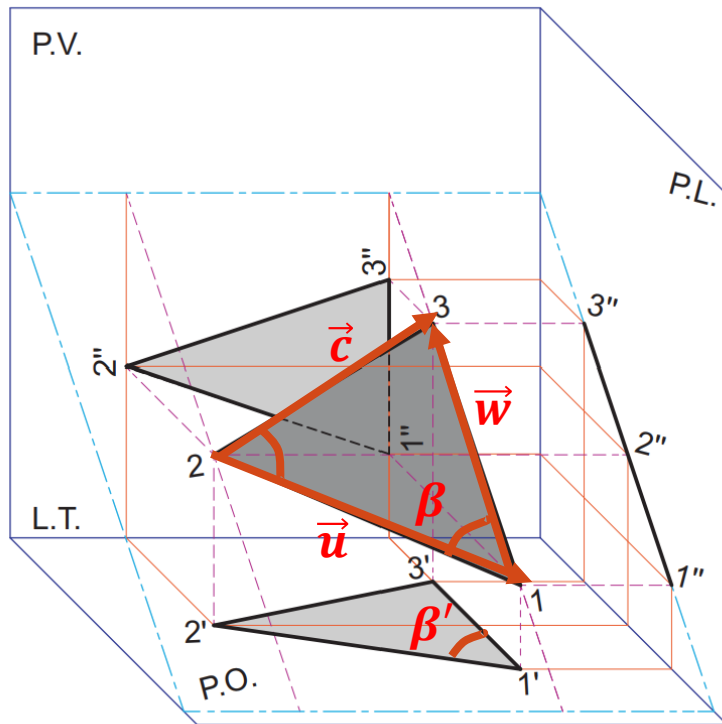
Proiezioni ortogonali di figure piane



...in cui il piano del triangolo e quello di proiezione sono coincidenti.

Proiezioni ortogonali di figure piane

- Se la proiezione ortogonale riguarda una figura su un **piano inclinato** rispetto al piano di proiezione, la figura proiettata **modifica le sue caratteristiche geometriche** rispetto alla figura originale

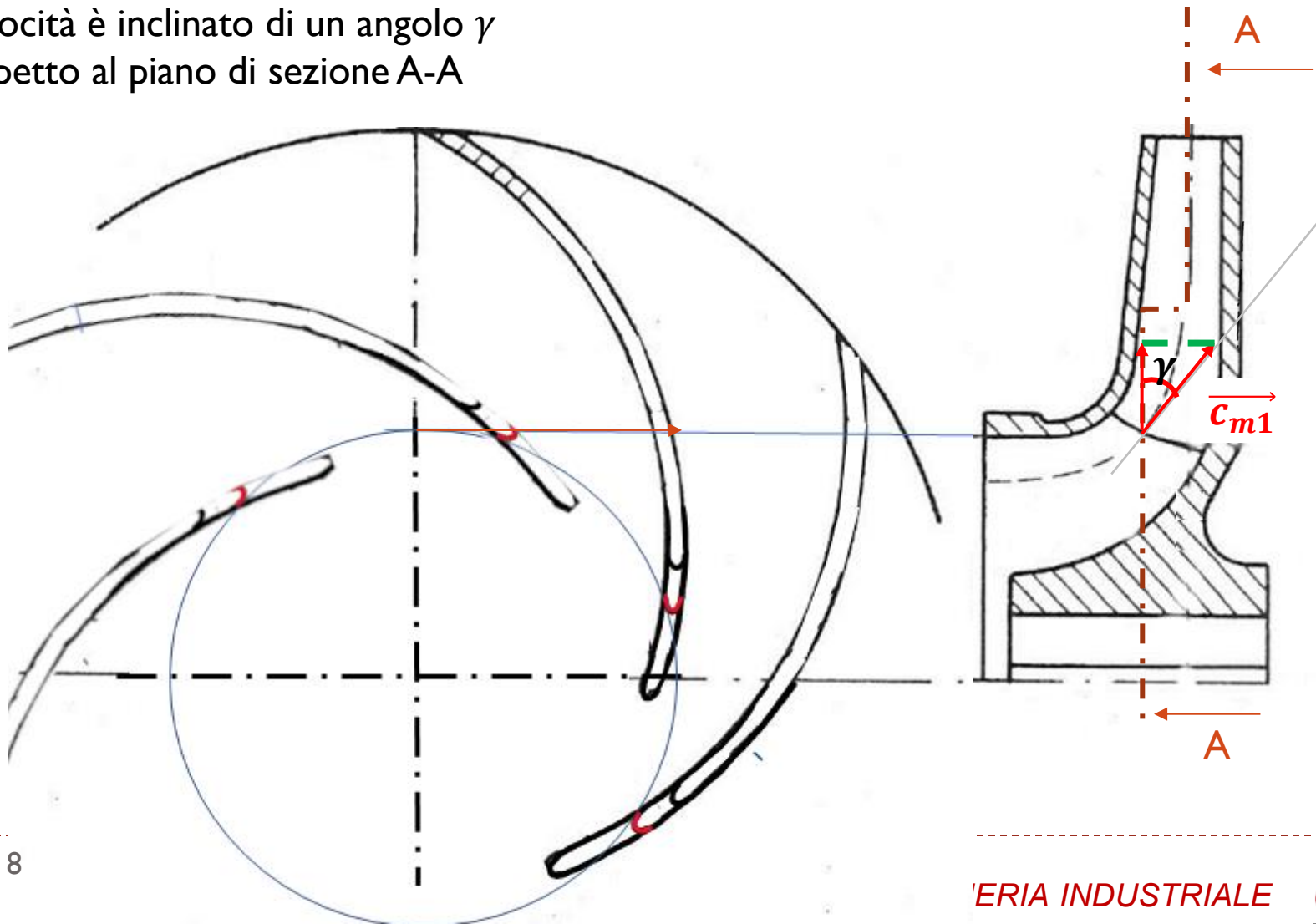


- In particolare, si modificano **gli angoli di flusso** rispetto ai quali vado a rappresentare la **geometria della pala** nel piano di proiezione

$$\beta \neq \beta'$$

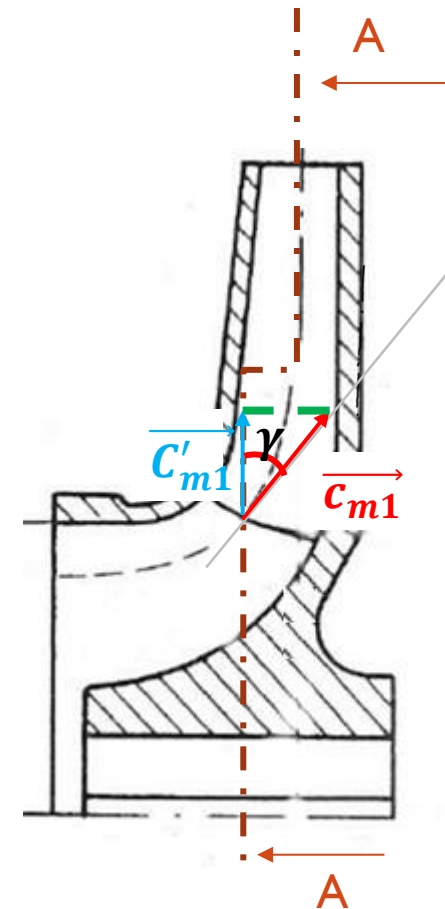
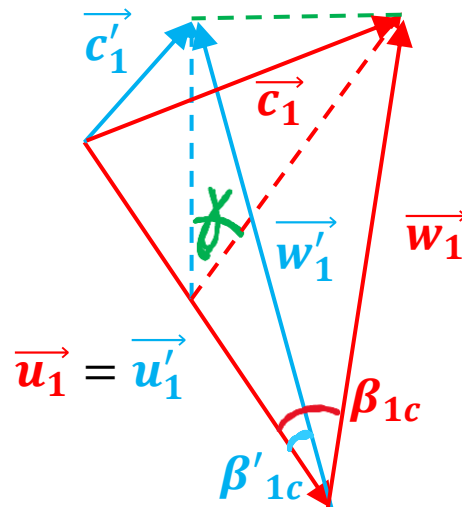
Proiezioni ortogonali di figure piane

- All'ingresso, il piano del triangolo di velocità è inclinato di un angolo γ rispetto al piano di sezione A-A



Proiezioni ortogonali di figure piane

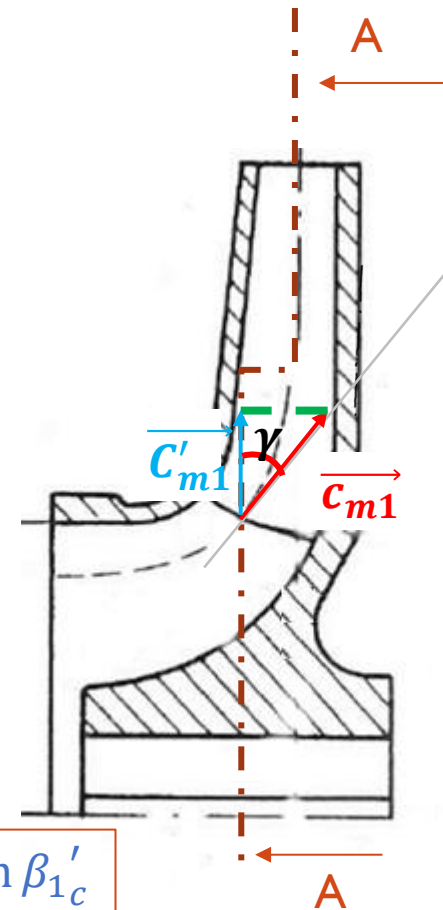
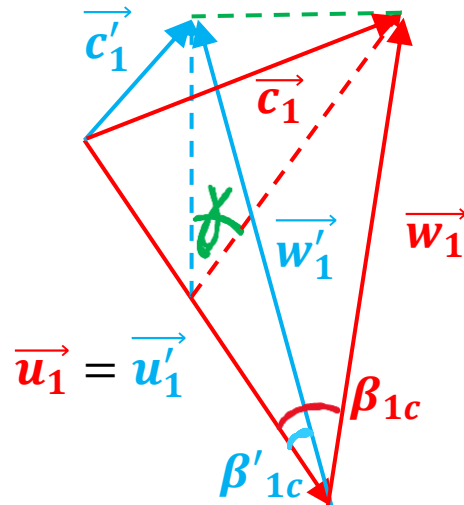
- All'ingresso, il piano del triangolo di velocità è inclinato di un angolo γ rispetto al piano di sezione A-A



Proiezioni ortogonali di figure piane

- Tra l'angolo β_{1c} della pala sulla superficie di corrente e l'angolo β'_{1c} proiettato invece sulla vista circonferenziale sussiste il seguente legame:

$$\tan \beta_{1c} = \frac{\overrightarrow{C_{m1}}}{\overrightarrow{W_{u1}}} \quad \tan \beta'_{1c} = \frac{\overrightarrow{C'_{m1}}}{\overrightarrow{W_{u1}}}$$

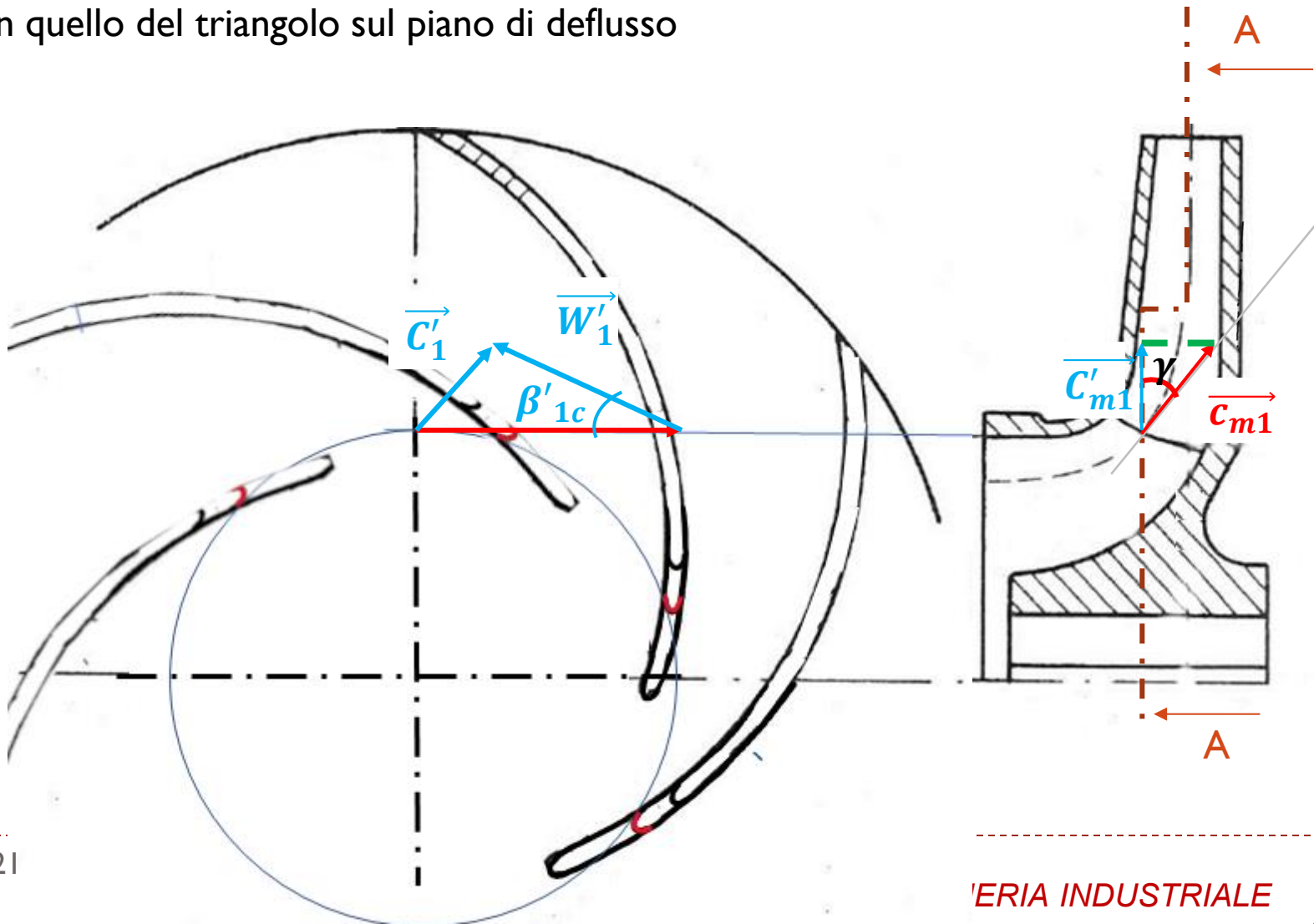


$$\frac{\tan \beta_{1c}}{\tan \beta'_{1c}} = \frac{\overrightarrow{C_{m1}} \overrightarrow{W_{u1}}}{\overrightarrow{W_{u1}} \overrightarrow{C'_{m1}}} = \frac{\overrightarrow{C_{m1}}}{\overrightarrow{C'_{m1}}} = \frac{\overrightarrow{C_{m1}}}{\overrightarrow{C_{m1}} \cos \gamma} \Rightarrow \tan \beta_{1c} = \frac{\tan \beta'_{1c}}{\cos \gamma}$$

$$\tan \beta_{1c} = \frac{\tan \beta'_{1c}}{\cos \gamma}$$

Proiezioni ortogonali di figure piane

- Nel piano circonferenziale è quindi quotato l'angolo costruttivo β'_{1c} e non quello del triangolo sul piano di deflusso

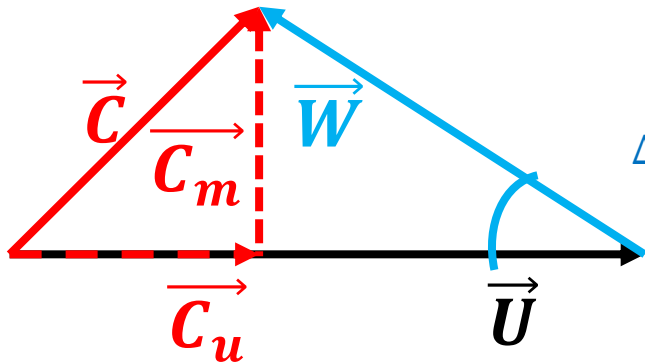


Lo scambio energetico: i contributi

Ripartizione dello scambio energetico

$$\Delta H^0 = gh_t = U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}$$

$$\Delta H^0 = gh_t = gh + gh_r$$



- In assenza di perdite fluidodinamiche (fluido perfetto), il lavoro meccanico eseguito dalla girante di una pompa centrifuga

$$\Delta H^0 = gh_t = U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1} = gh = \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} \right)_{id} + \left(\frac{C_2^2 - C_1^2}{2} \right)$$

è interamente acquisito dal fluido sotto forma di incremento di pressione statica $\Delta p/\rho$ e di energia cinetica $\Delta C^2/2$.

- Per un generico triangolo delle velocità vale:

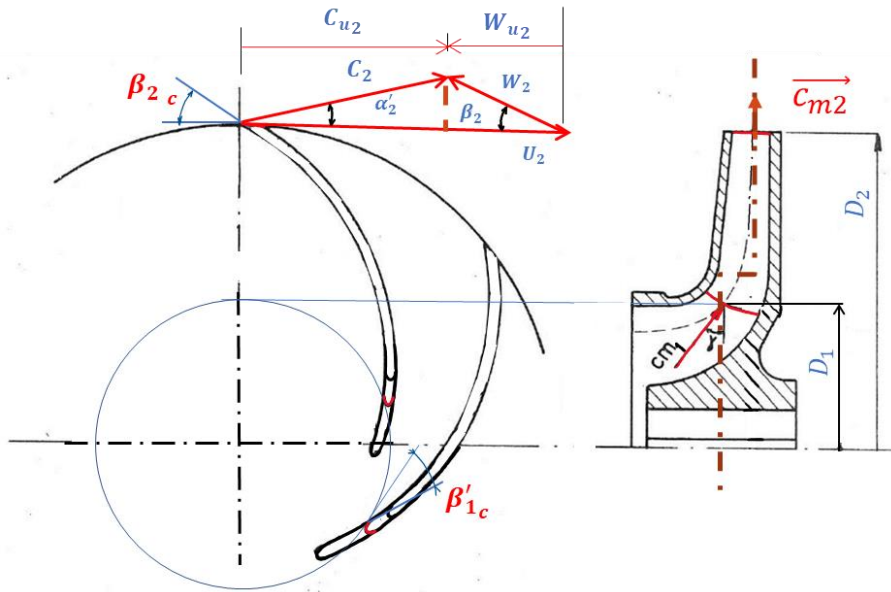
$$C^2 - C_u^2 = W^2 - (U - C_u)^2 = W^2 - U^2 - C_u^2 + 2UC_u$$

da cui:

$$W^2 = C^2 + U^2 - 2UC_u \quad \Rightarrow \quad UC_u = \frac{C^2}{2} + \frac{U^2 - W^2}{2}$$

$$\Rightarrow U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1} = \left(\frac{C_2^2 - C_1^2}{2} \right) + \left(\frac{U_2^2 - U_1^2}{2} \right) - \left(\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} \right)$$

Ripartizione dello scambio energetico

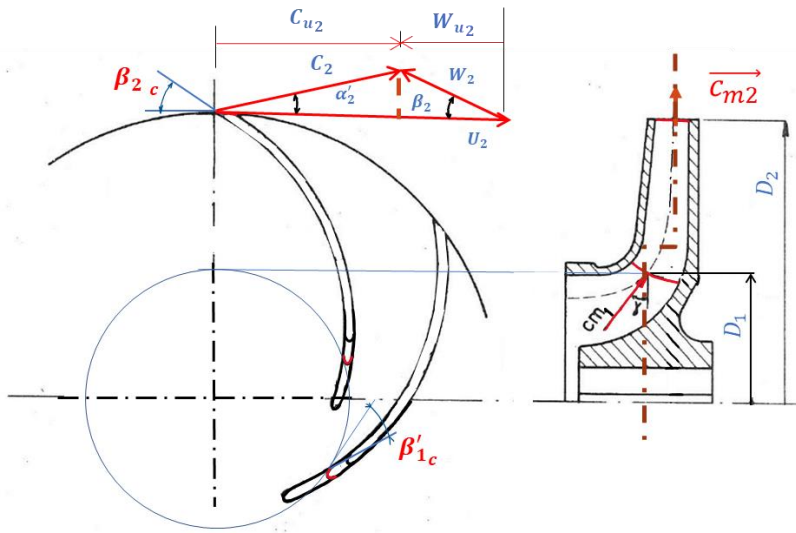


$$\left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} \right)_{id} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2}$$

⇒ L'incremento di pressione statica attraverso la girante dipende da **due contributi** distinti:

- Il primo legato **all'azione centrifuga** della girante;
- il secondo legato invece al **decelerazione** della velocità relativa **W** attraverso il condotto interpalare registrato dall'osservatore che ruota in solido con la girante.

Ripartizione dello scambio energetico



$$\left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} \right)_{id} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2}$$

Effetto centrifugo

- La **rotazione in solido** del fluido all'interno della girante è regolato dall'equazione dell'equilibrio radiale:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \omega^2 r \quad \rightarrow \quad \left(\frac{p_{2c} - p_{1c}}{\rho} \right)_{centr} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2}$$

Osservatore solidale alla girante

- L'osservatore che **ruota in solido** con la girante non si accorge dello scambio di energia in atto, sicché (fluido perfetto):

$$\frac{p_{1w}}{\rho} + \frac{W_1^2}{2} = \frac{p_{2w}}{\rho} + \frac{W_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{p_{2w} - p_{1w}}{\rho} = \frac{W_1^2 - W_2^2}{2}$$

Ripartizione dello scambio energetico

$$\left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} \right)_{id} = \frac{p_{2c} - p_{1c}}{\rho} + \frac{p_{2w} - p_{1w}}{\rho} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2}$$

$$\Delta H^0 = gh_t = U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}$$

⇒ Ne consegue che, a differenza del lavoro eseguito dalla girante (ΔH^0 , gh_t), la variazione di pressione $\Delta p = p_2 - p_1$ dipende dalla densità del fluido.

- E' questa la ragione per la quale le pompe centrifughe **non** sono **autoadescanti**.

- L'incremento di pressione Δp fornito all'aria presente all'interno della pompa è circa 830 volte inferiore a quello che riceverebbe l'acqua ($\rho_{aria}/\rho_{acqua} \approx 1/833$), a sua volta commisurato alla caratteristica resistente dell'impianto di pompaggio.

Domande, Curiosità, Dubbi, Perplessità?

PROF. ING. ALBERTO BENATO, PH.D.

ASSOCIATE PROFESSOR

TURBOMACHINERY & ENERGY SYSTEMS GROUP

DEPARTMENT OF INDUSTRIAL ENGINEERING - UNIVERSITY OF PADOVA
VIA VENEZIA 1 - 35131 - PADOVA
BLDG. EX DIM - 5TH FLOOR - ROOM 19

TEL. 049 827 6752

MAIL: ALBERTO.BENATO@UNIPD.IT

WEBSITE: RESEARCH.DII.UNIPD.IT/TES/

