



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



Dipartimento
di Ingegneria Industriale

Le turbomacchine

Corso di Macchine 1

Agenda

- ▶ La macchina a fluido e i suoi elementi
- ▶ Viste Rappresentative
- ▶ Parametri funzionali
- ▶ Principio di variazione della quantità di moto
 - ▶ La quantità di moto
 - ▶ Conservazione della quantità di moto
 - ▶ La quantità di moto nelle turbomacchine
 - ▶ Variazione della quantità di moto attraverso la girante
 - ▶ Spinta assiale
- ▶ Principio di variaz. del momento della quantità di moto
- ▶ Scambio di energia
 - ▶ Rendimento idraulico
 - ▶ Turbomacchine vs. Macchine Volumetriche





La macchina a fluido e i suoi elementi costruttivi

Macchine a fluido

«Macchina costituita da un insieme di **elementi fissi e mobili** che **interagiscono** con un fluido di lavoro (liquido, vapore o gas), realizzando con esso uno **scambio energetico**»

VOLUMETRICHE

TURBOMACCHINE

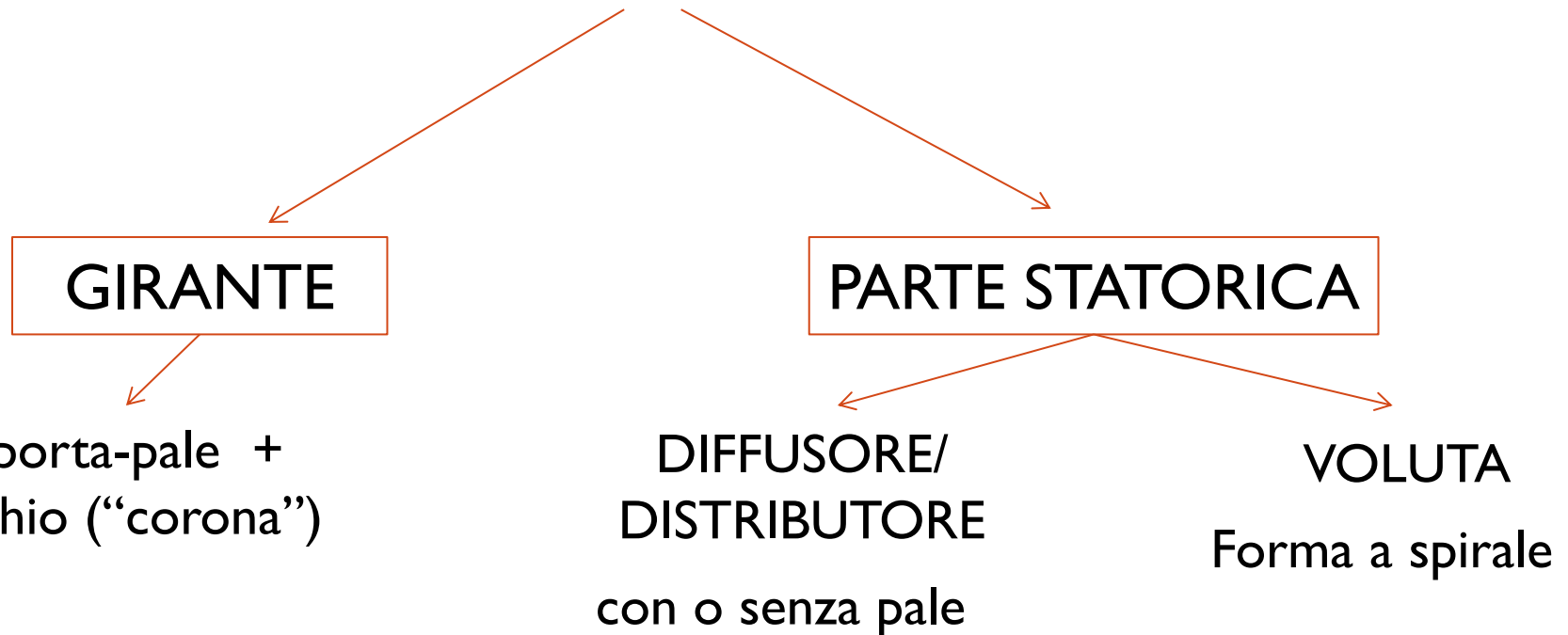
Modalità di scambio

Energia fluida  Lavoro meccanico



Elementi costitutivi

- ▶ Sono costituite da due elementi:



Elementi costitutivi

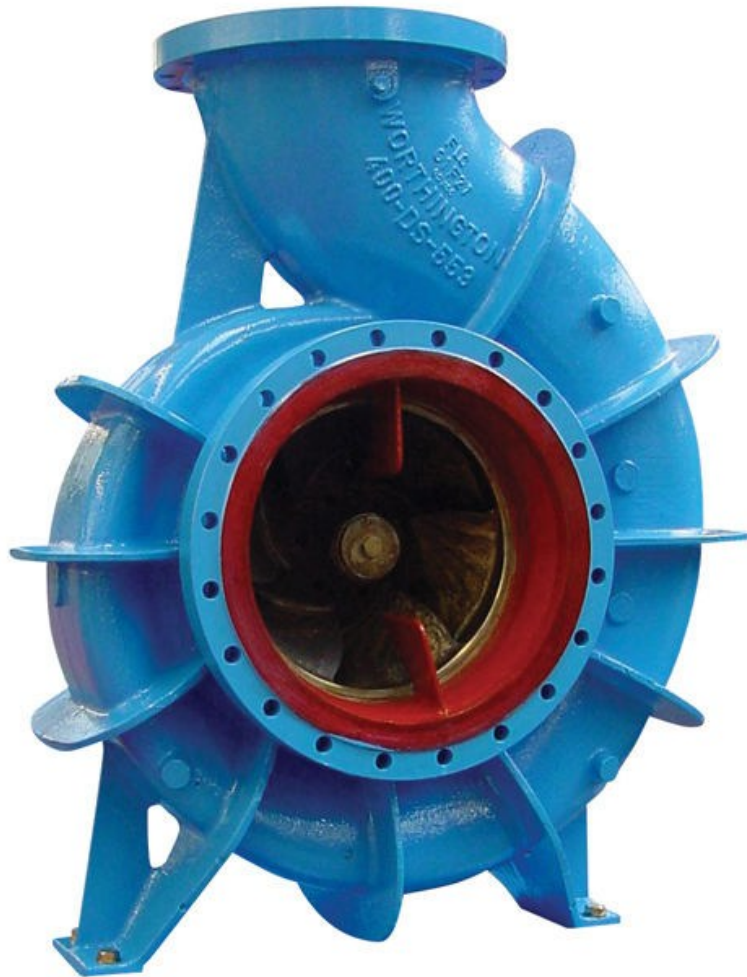


Disco porta-pale

Disco porta-pale +
coperchio (“corona”)

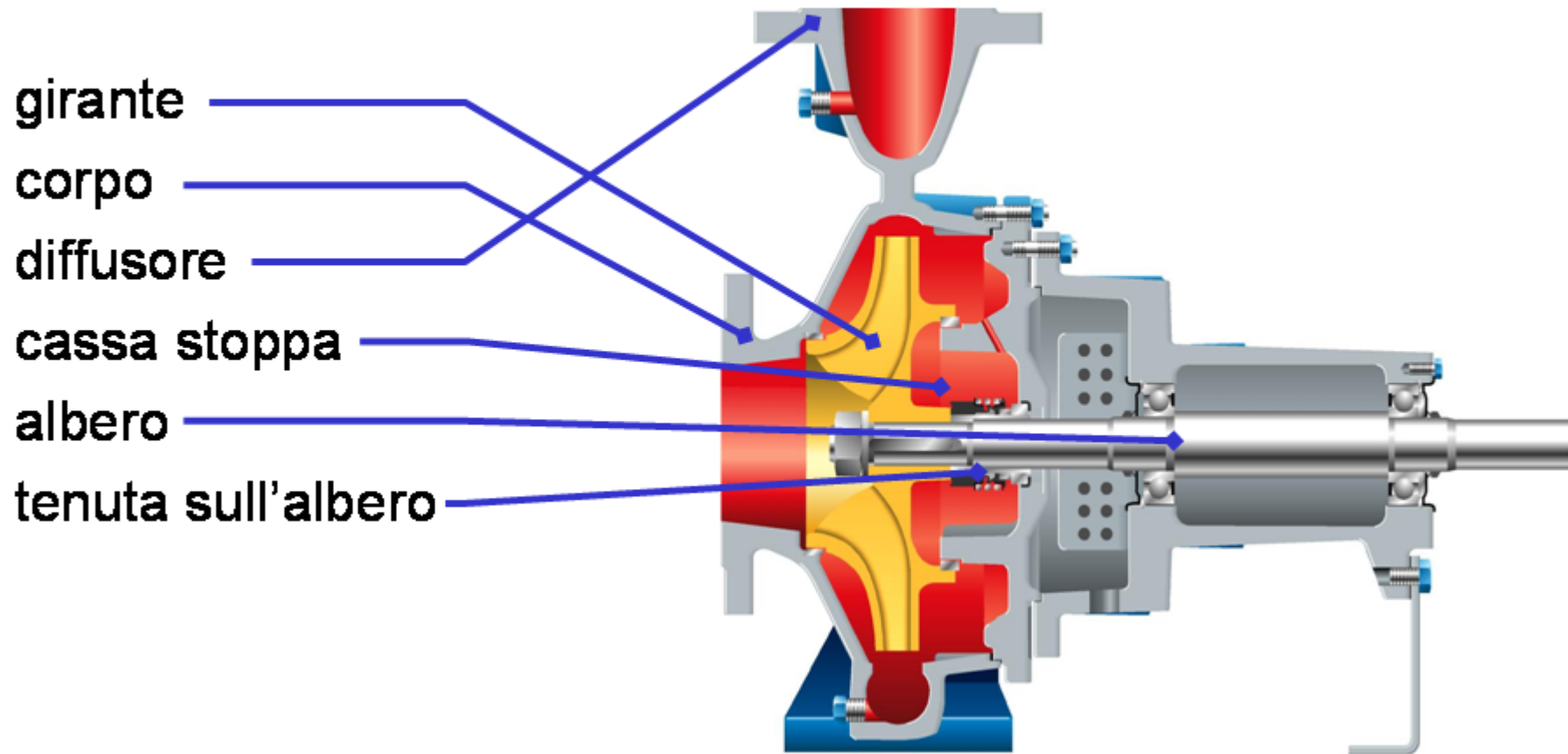


Una pompa centrifuga

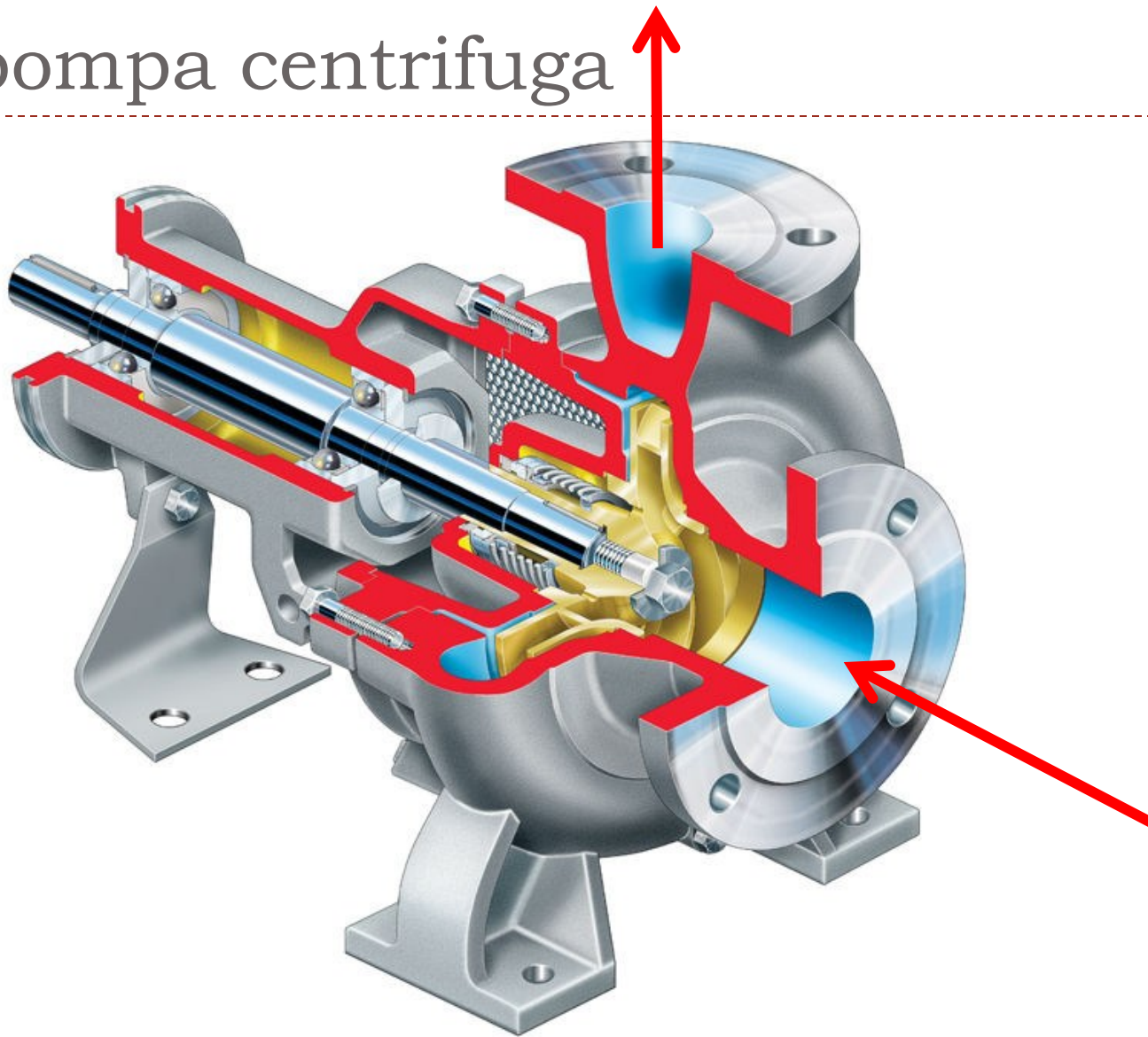


Una pompa centrifuga

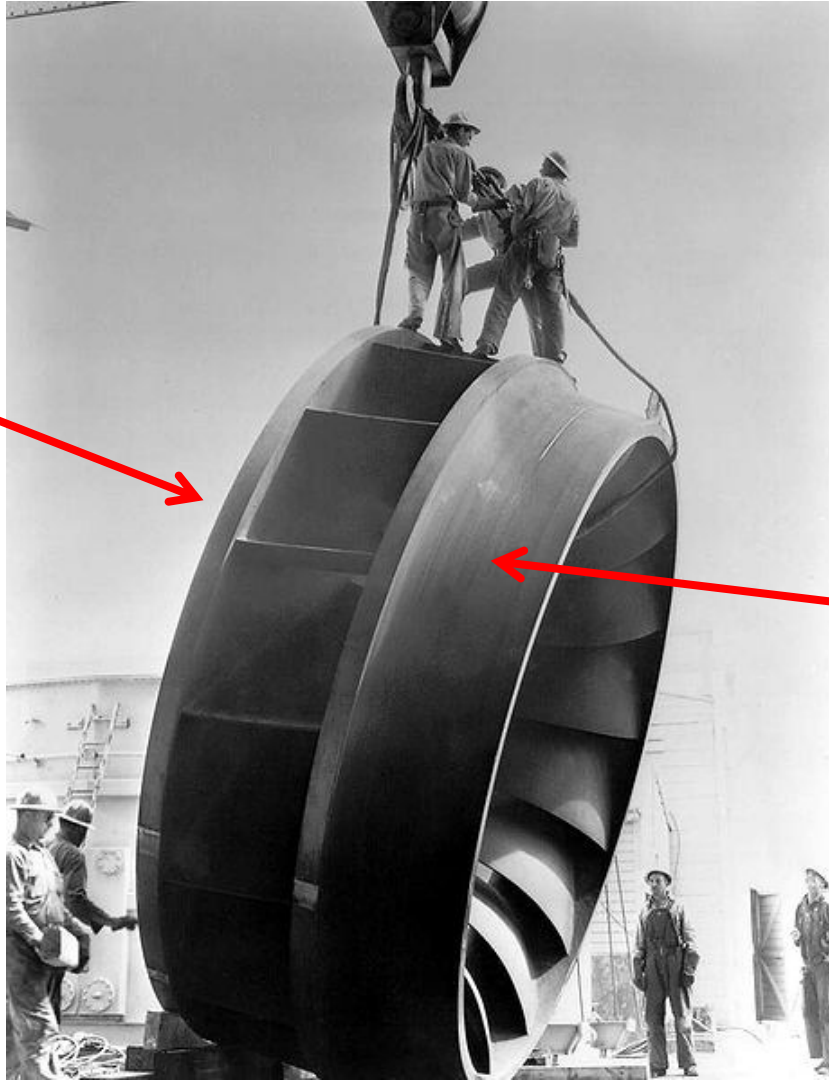
Nella forma più elementare le pompe centrifughe sono costituite da:



Una pompa centrifuga



Una turbina Francis



Disco porta-pale

“corona”

Elementi costitutivi

GIRANTE:

- Fa **variare** il **momento della quantità di moto** del fluido → fa variare l'energia statica e cinetica del fluido
- Nelle **macchine operatrici** trasforma l'energia meccanica in energia fluida, mentre nelle **macchine motrici** converte l'energia fluida in energia meccanica disponibile all'albero

PARTE STATORICA:

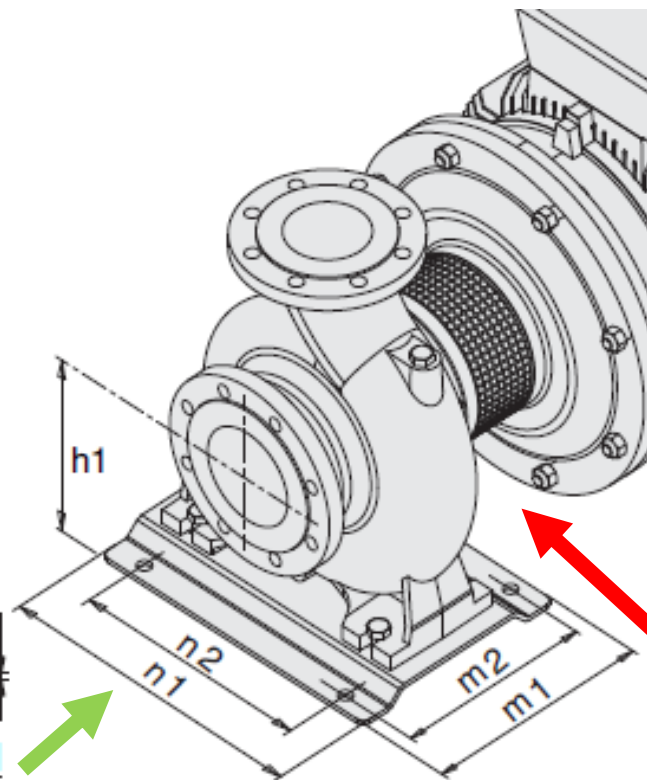
- **Trasforma** l'energia del fluido
- Nelle **macchine operatrici** raccoglie il fluido che esce dalla girante e lo convoglia alla condotta di mandata, convertendo energia cinetica in energia di pressione
- Nelle **macchine motrici**, indirizza il fluido verso la girante, trasformando la sua energia di pressione in energia cinetica



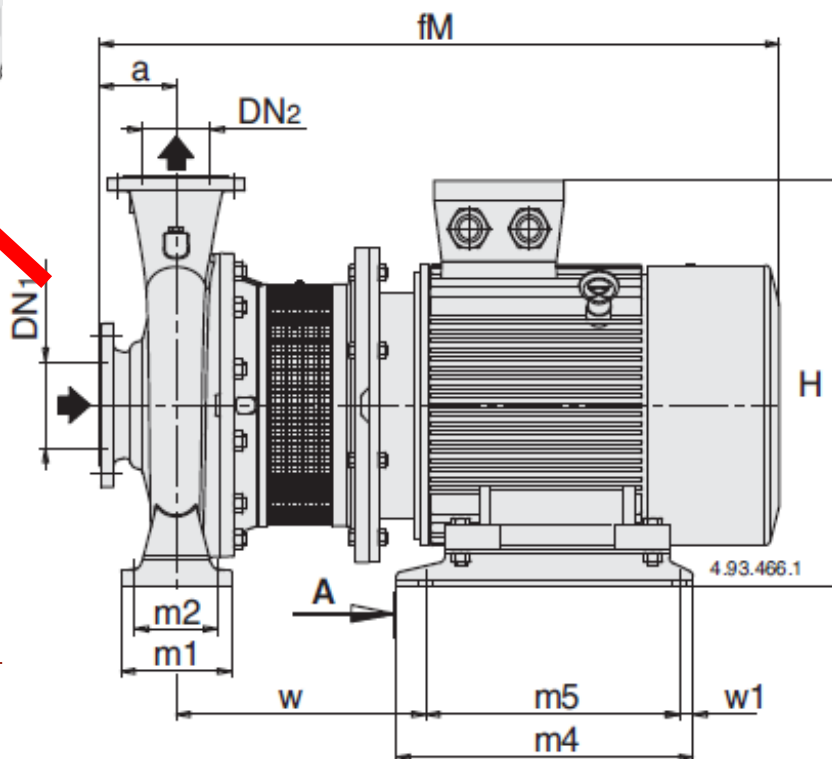
Viste rappresentative

Come si rappresentano graficamente queste macchine???

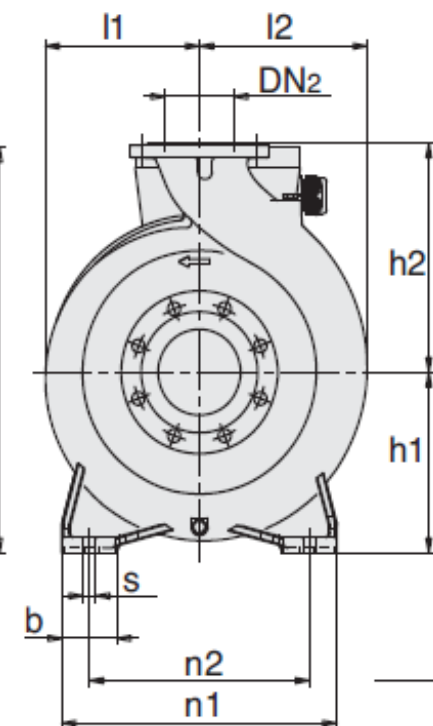
Viste rappresentative



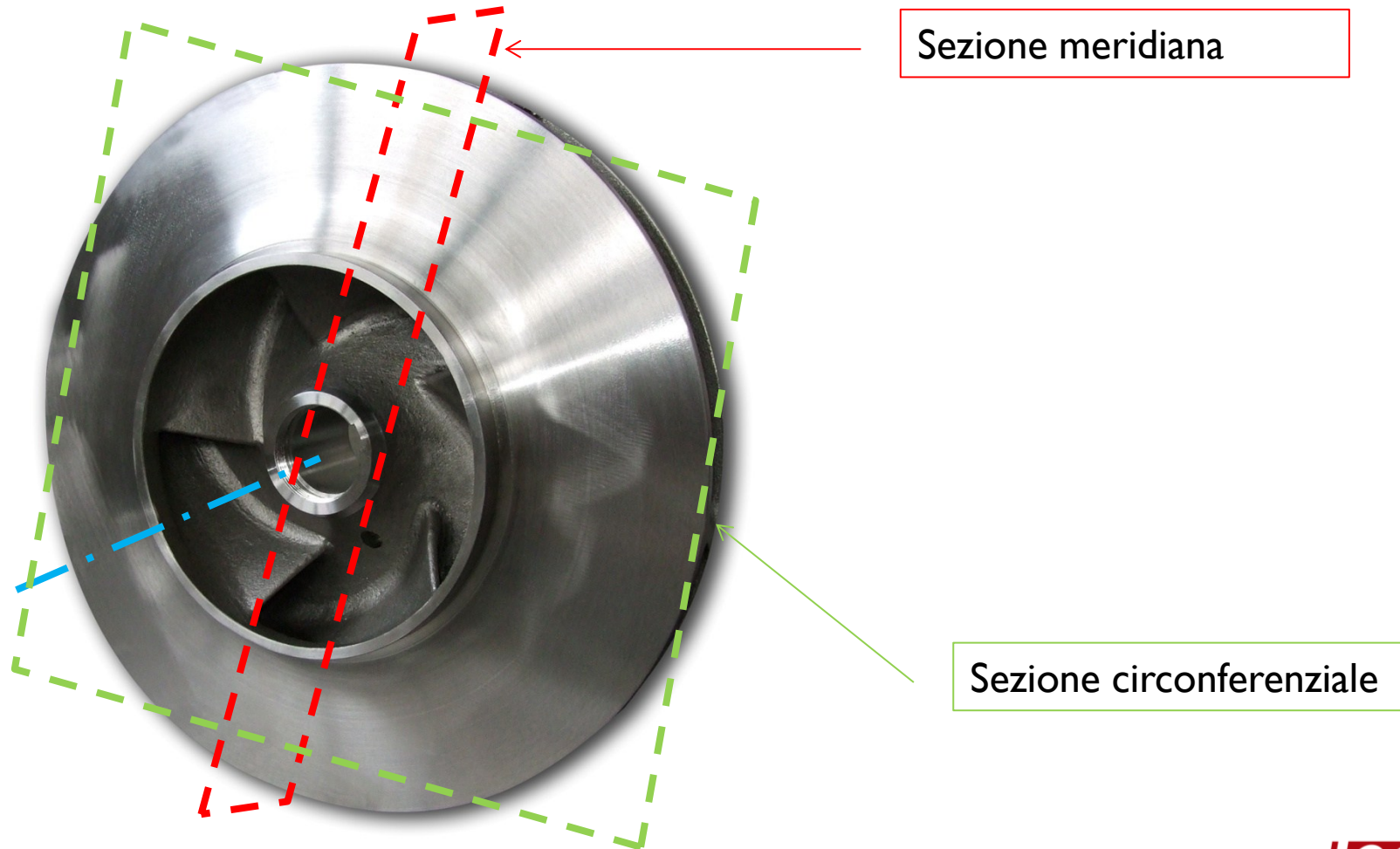
Vista meridiana



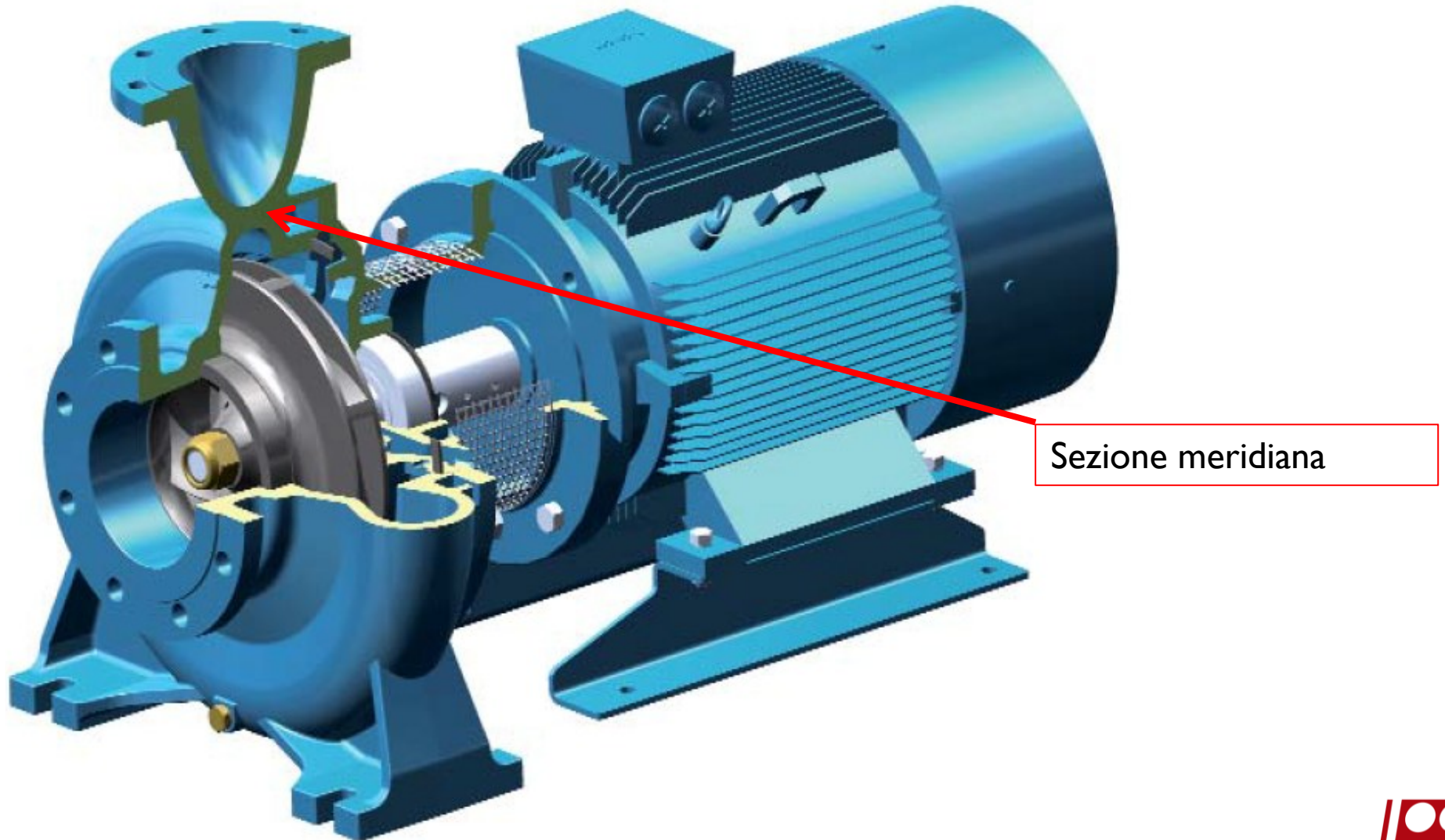
Vista
circonferenziale



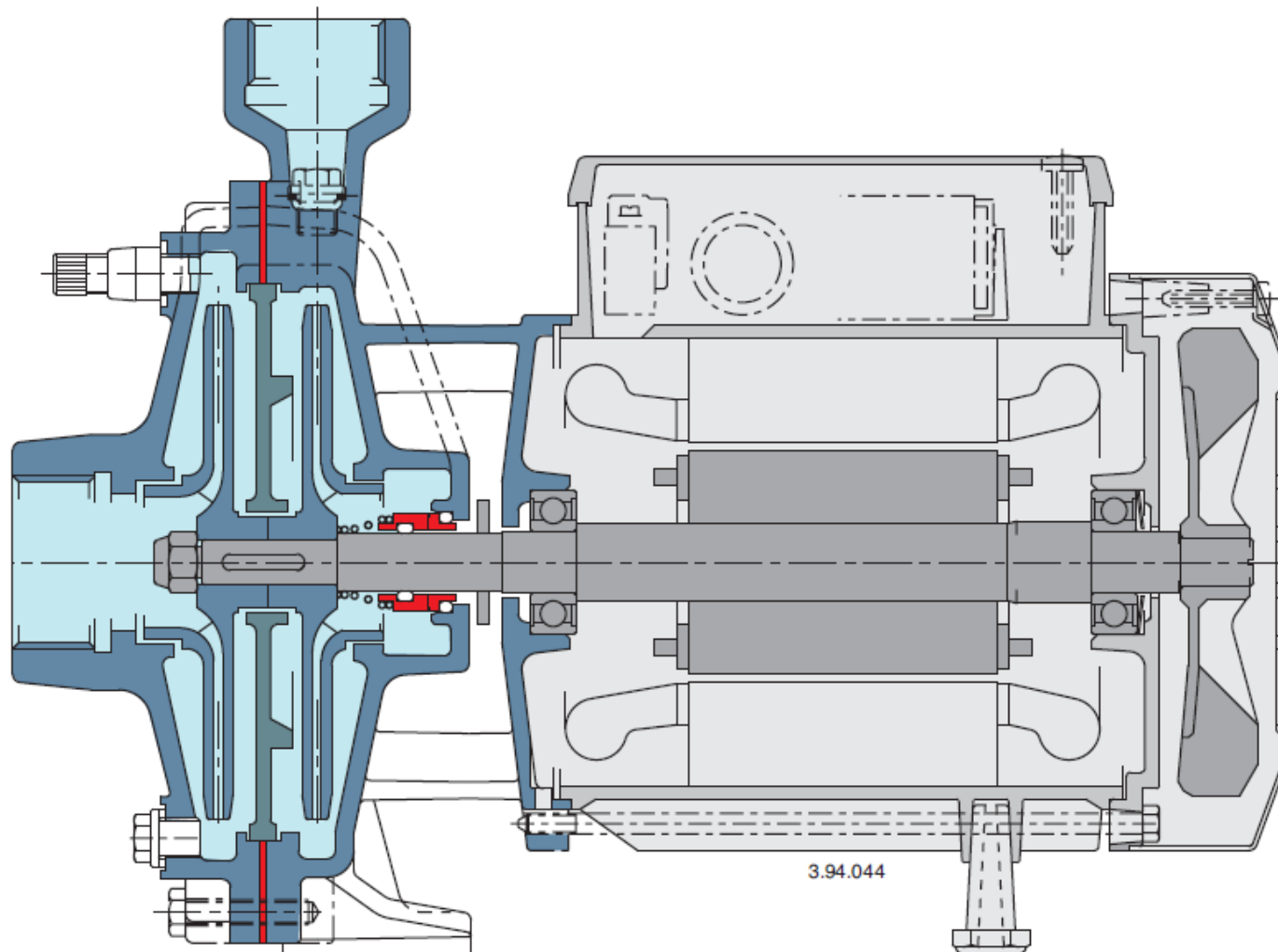
Sezioni rappresentative



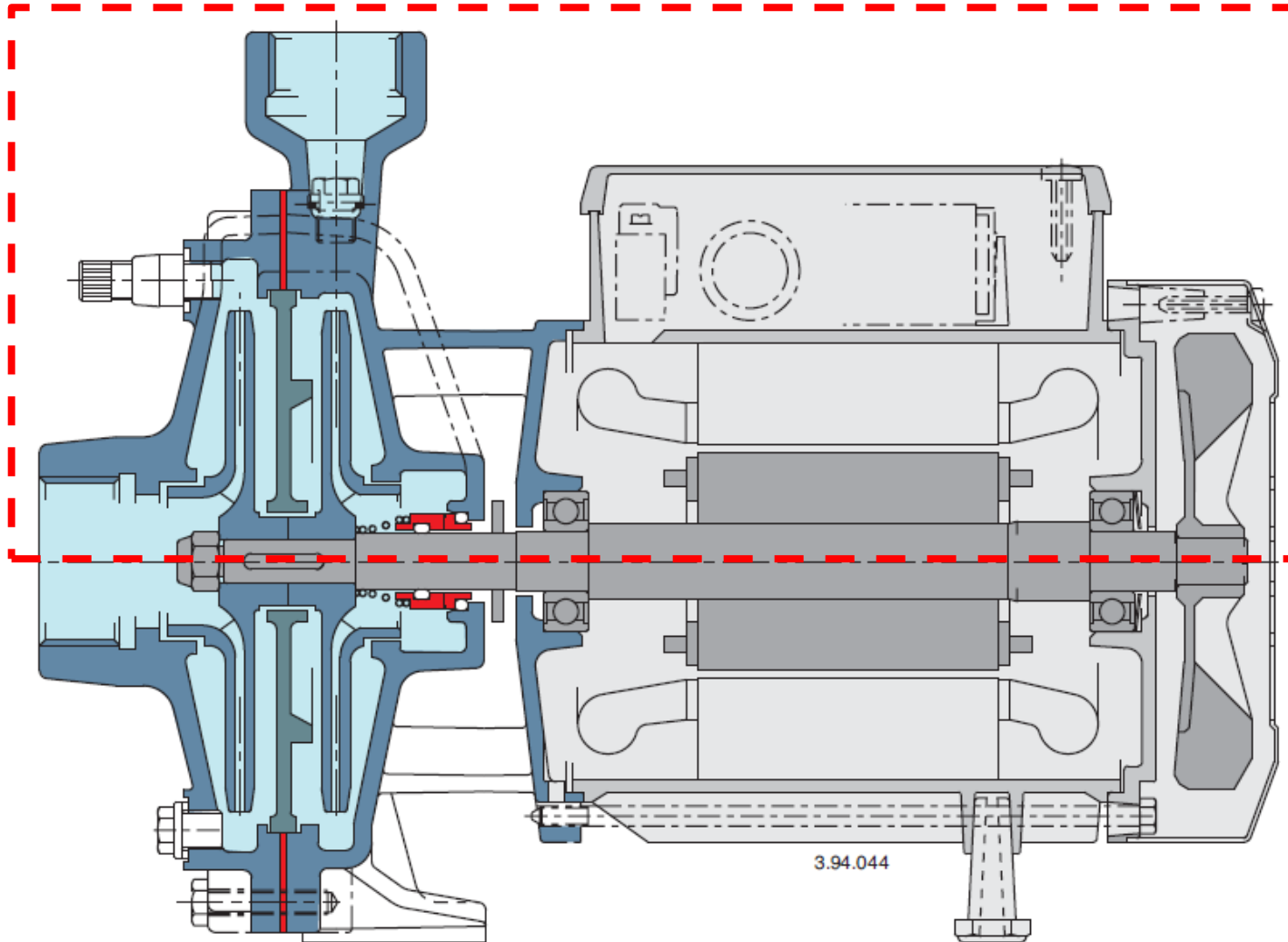
Sezioni rappresentative



Sezione meridiana

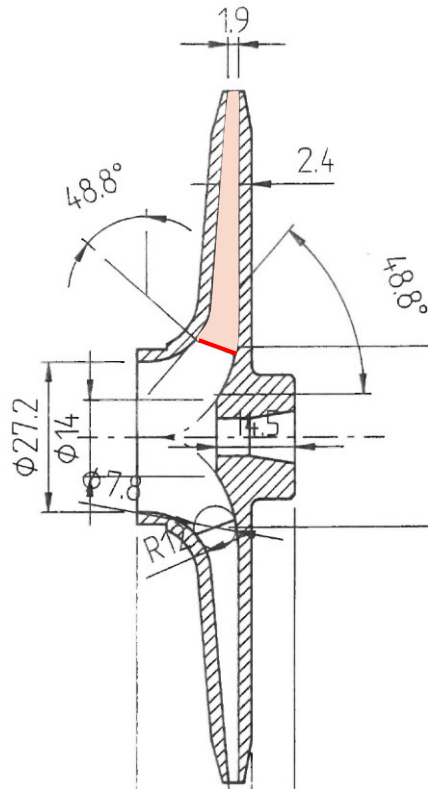


Sezione meridiana



Sezione meridiana

Non si tratta di una
semplice sezione di un
solido!!



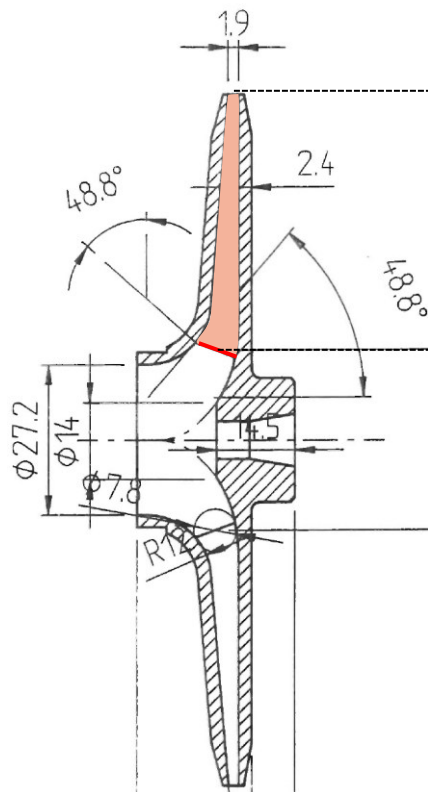
Sezione meridiana



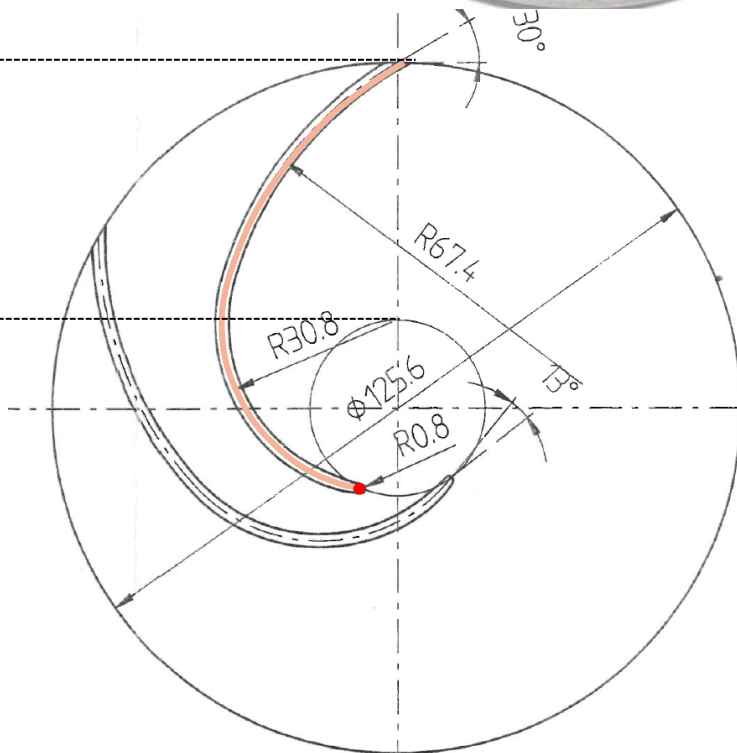
sezione di un solido!!

Sezioni rappresentative

Non si tratta di una semplice
sezione di un solido!!



Sezione meridiana



Sezione circonferenziale





Parametri funzionali

Parametri di funzionamento

- Si è visto che, a prescindere dalla natura del fluido, i **parametri funzionali** che descrivono il comportamento di una **macchina a fluido** sono **quattro**:

$$\Delta H_{is}^0 \text{ (oppure } \frac{\Delta p^0}{\rho} = gh) \quad Q_m \text{ (oppure } Q_v) \quad P_{alb} \text{ (oppure } \eta) \quad n$$

- Tra questi parametri il **numero di variabili indipendenti** dipende dalla **tipologia di macchina a fluido**: **turbomacchine** e **macchine volumetriche**

Il numero delle **variabili indipendenti** sono **due**: Q_m (oppure Q_v) e n

⇒ ΔH_{is}^0 (oppure $\frac{\Delta p^0}{\rho} = gh$) e P_{alb} (oppure η) sono univocamente definite un volta stabiliti n e Q_m (Q_v)

C'è un'**unica** variabile indipendente: il numero di giri n

⇒ Stabilito n è univocamente definita la portata Q_m (oppure Q_v) trasferita dalla macchina volumetrica dal serbatoio a monte a quello a valle. Lo **scambio energetico** è fissato dall'impianto



Principio di variazione della quantità di moto

Girante: fa variare il momento della quantità di moto del fluido
→ Fa variare l'energia statica e cinetica del fluido!!!

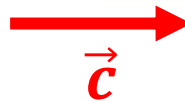
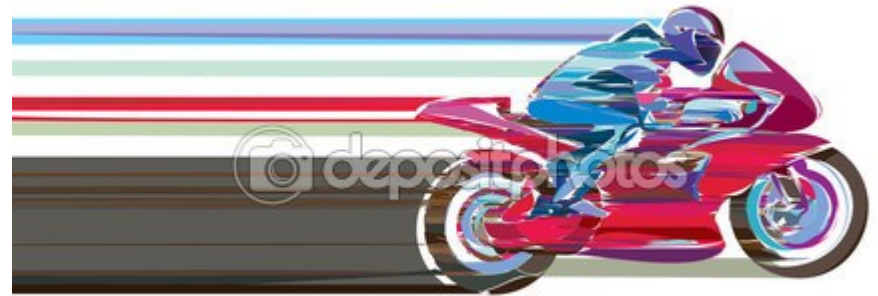
Principio di variazione della quantità di moto

Quantità di moto e Conservazione della quantità di moto

La quantità di moto

- ▶ La quantità di moto è una grandezza vettoriale definita come il prodotto della massa di un oggetto per la sua velocità

$$\vec{I} = m\vec{c}$$



Stessa velocità = stesso impatto???

La quantità di moto

- La quantità di moto è una grandezza vettoriale definita come il prodotto della massa di un oggetto per la sua velocità

$$\vec{I} = m\vec{c}$$

$$m = 0.058 \text{ kg}$$



$$m = 90 \text{ kg}$$



$$\vec{c} = 10 \text{ m/s}$$

$$\vec{I} = 900 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

1550 volte superiore!!

$$\vec{I} = 0.58 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

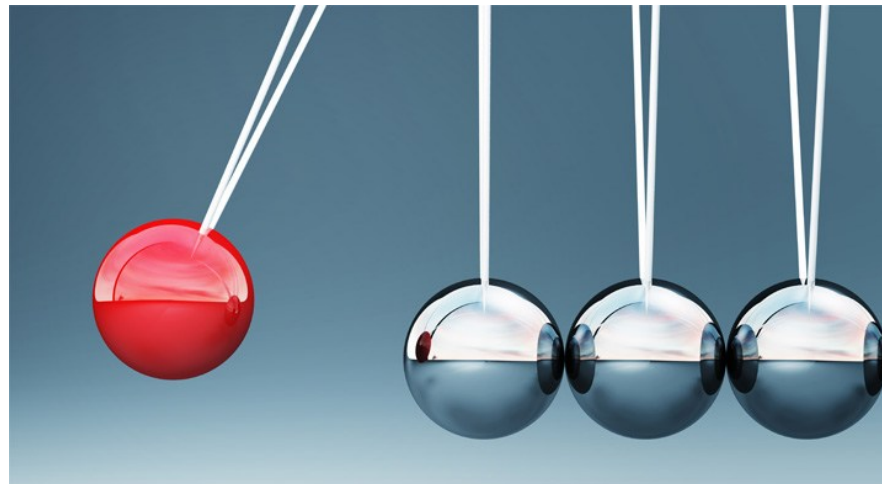
Conservazione della quantità di moto

- ▶ Se la risultante delle **forze esterne** che agiscono su un sistema è nulla, la **quantità di moto totale** del sistema rimane costante nel tempo

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d(\vec{c})}{dt} = \frac{d(m\vec{c})}{dt} = \frac{d(\vec{I})}{dt}$$

- ▶ In un qualunque **sistema isolato**, la risultante delle forze esterne è nulla e la **quantità di moto** totale del sistema **si conserva**
- ▶ Si può definire sistema isolato anche un sistema di **corpi** che **interagiscono** tramite forze solo interne al sistema

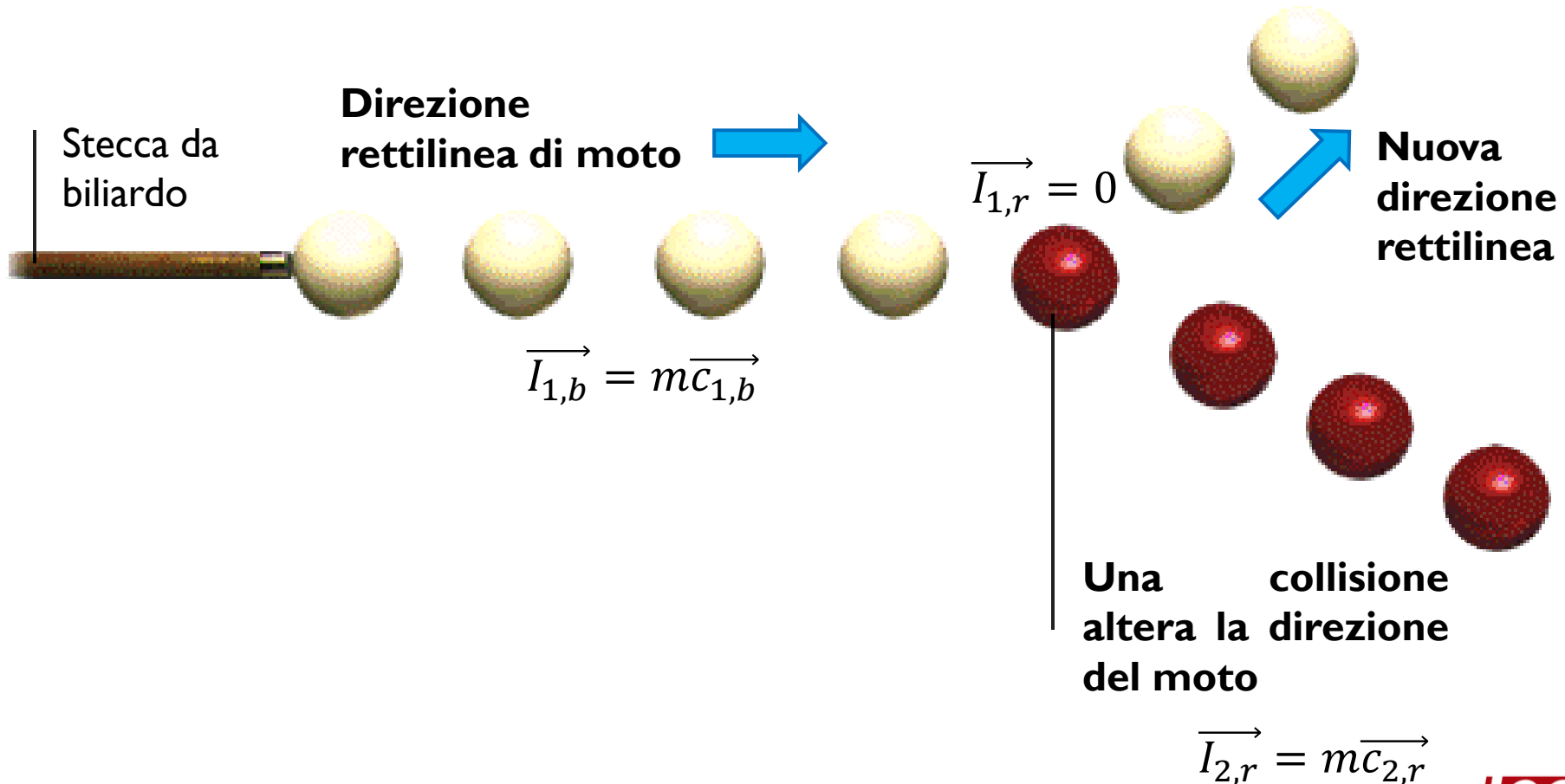
La quantità di moto dei corpi che interagiscono cambia ma la quantità di moto totale del sistema si conserva (in condizioni ideali)



Conservazione della quantità di moto

$$\overrightarrow{I_{0,b/r}} = 0 \quad (\text{palla bianca e rossa})$$

$$\overrightarrow{I_{2,b}} = m\overrightarrow{c_{2,b}}$$



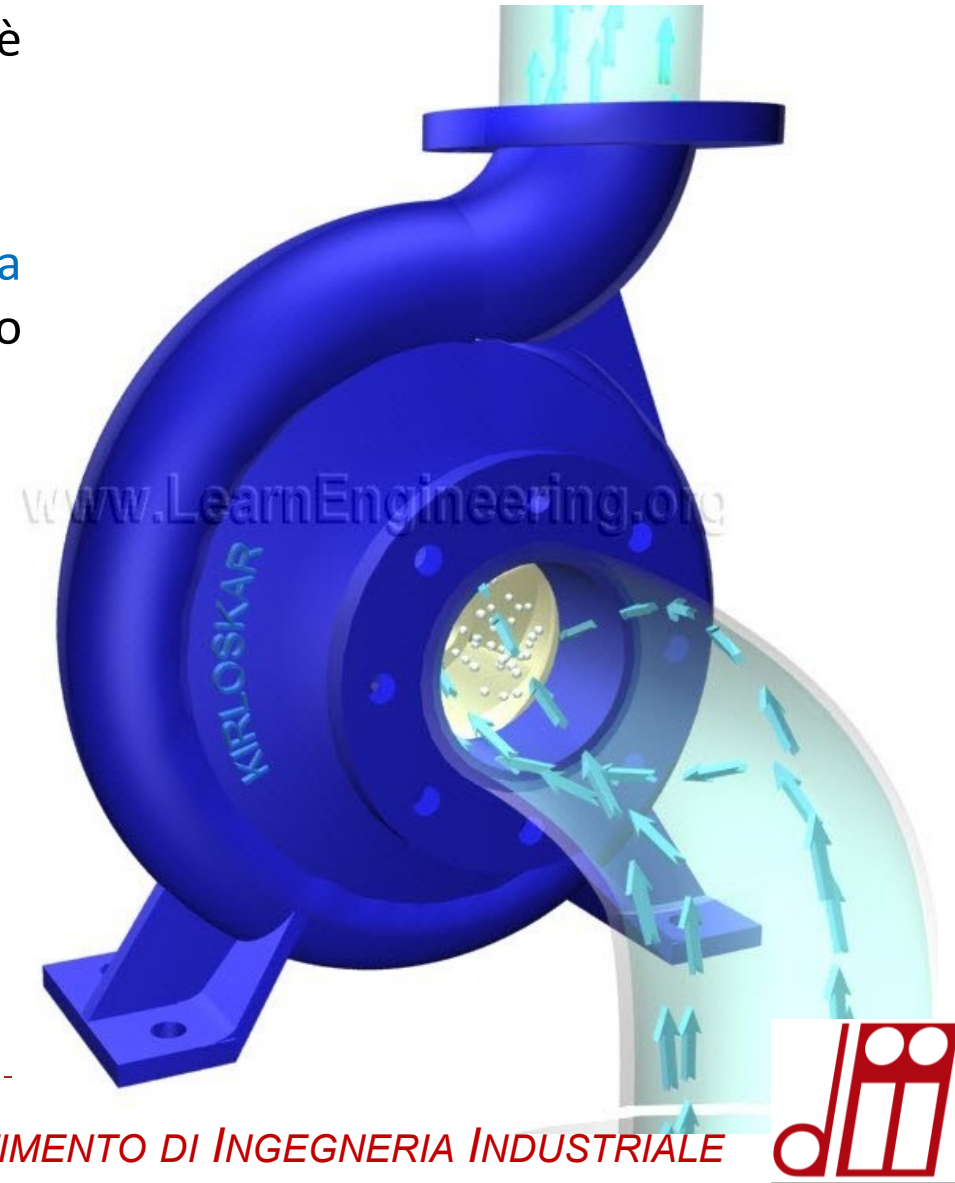
Principio di variazione della quantità di moto

Quantità di moto nelle Turbomacchine, Principio di Variazione
della quantità di moto e Spinta assiale

La quantità di moto nelle turbomacchine

- ▶ Nelle turbomacchine il sistema è rappresentato da una **massa fluente**
- ▶ Si valuta l'**interazione** tra la **massa fluente** e le **pareti** del condotto attraverso cui passa il fluido

➡ Per comprendere tale interazione devo seguire la massa tramite un volume di controllo!



La quantità di moto nelle turbomacchine

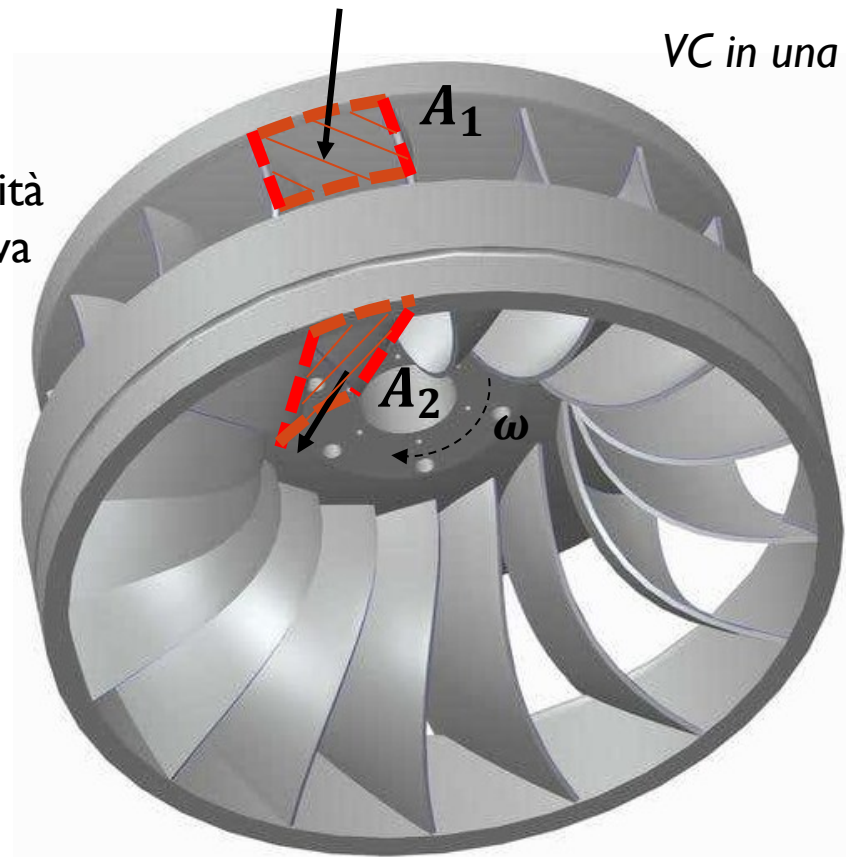
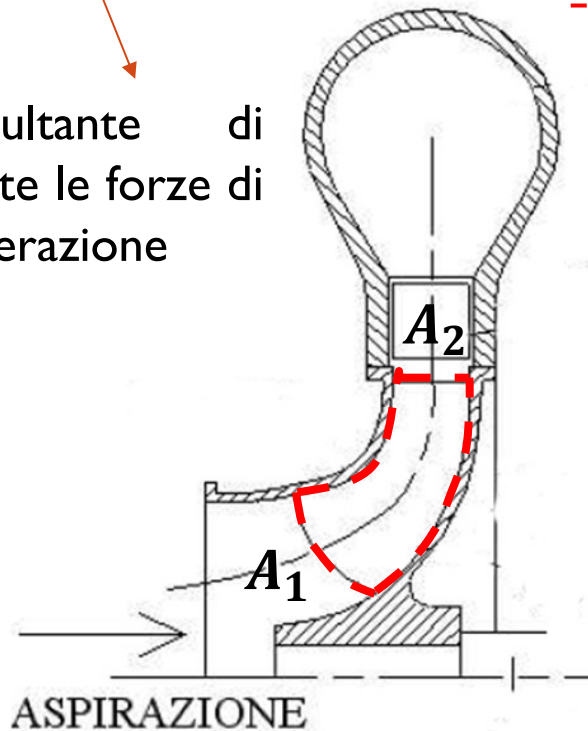
- Il principio di variazione della quantità di moto consente di valutare l'interazione tra condotto e fluido, note che siano le grandezze fluide a monte e a valle dello stesso

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d(\vec{w})}{dt} = \frac{d(m\vec{w})}{dt}$$

Risultante di tutte le forze di interazione

Velocità relativa

Variazione della quantità di moto



La quantità di moto nelle turbomacchine

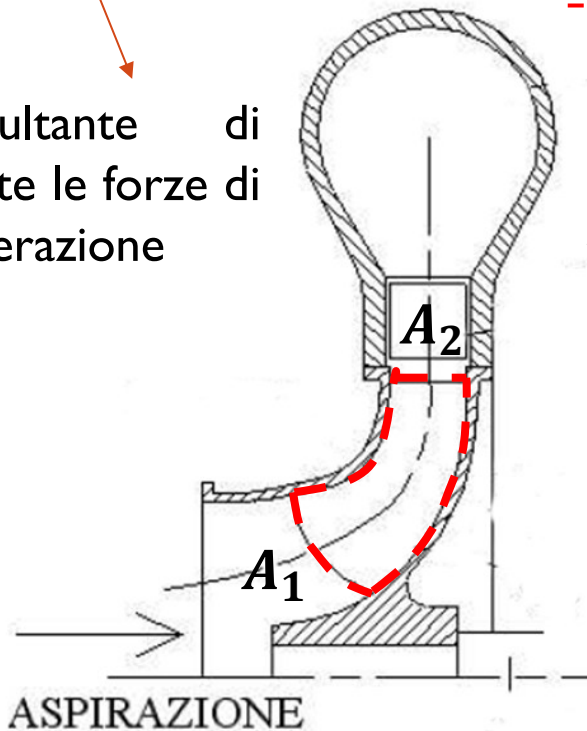
- Il principio di variazione della quantità di moto consente di valutare l'interazione tra condotto e fluido, note che siano le grandezze fluide a monte e a valle dello stesso

$$\vec{F}_w = m \vec{a}_R = m \frac{d(\vec{w})}{dt} = \frac{d(m\vec{w})}{dt}$$

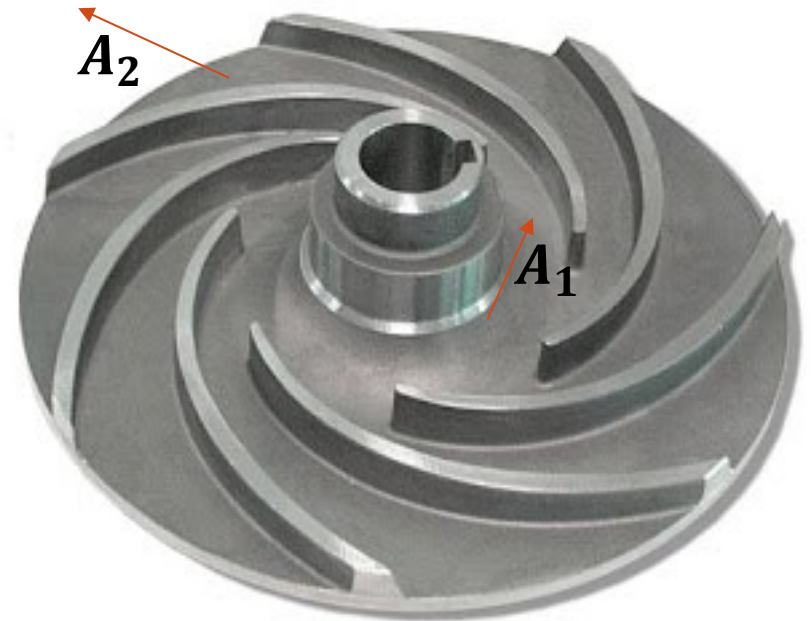
Risultante di tutte le forze di interazione

Velocità relativa

Variazione della quantità di moto

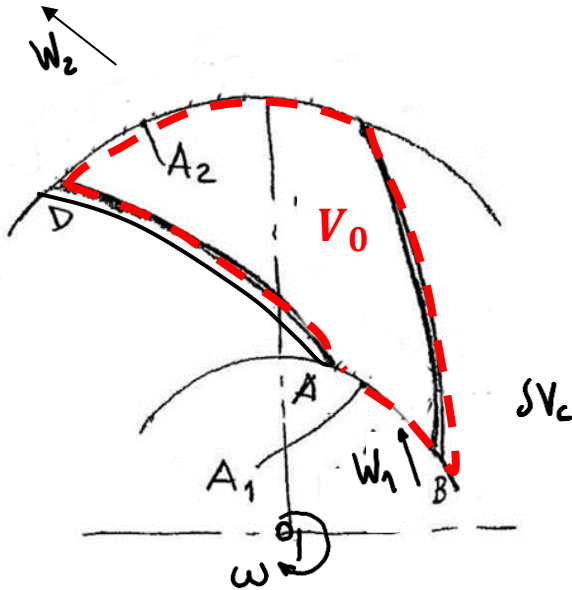


VC in una pompa



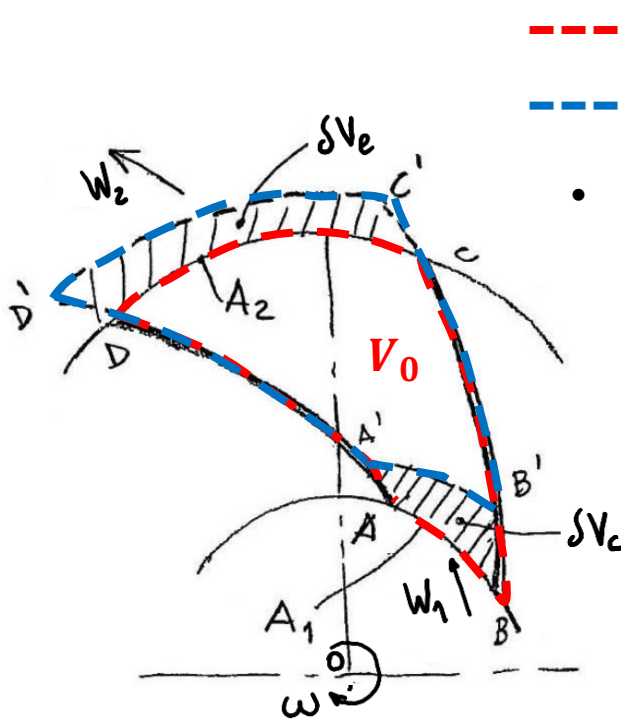
Variazione della quantità di moto attraverso la girante

--- t_0 $\longrightarrow$ V_0



- Si consideri il volume V_0 delimitato dalla superficie S_0 (superficie di controllo $ABCD$) che all'istante t_0 contiene la massa m di fluido
- La girante ruoti con velocità angolare ω attorno all'asse O , e si faccia riferimento al sistema di riferimento relativo che ruota in solido con la girante

Variazione della quantità di moto attraverso la girante



--- t_0 $\longrightarrow V_0$

--- $t_0 + dt$ $\longrightarrow$

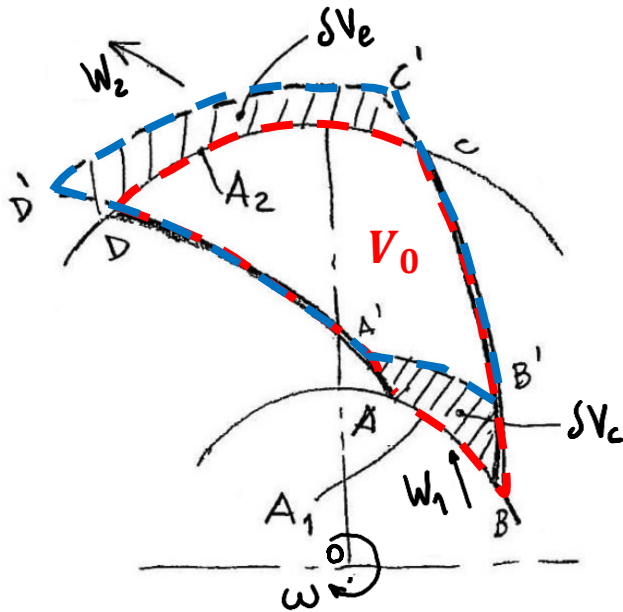
$$V = V_0 + \delta V$$

- Nell'istante successivo $t_0 + dt$ la superficie di controllo si è spostata in $A'B'C'D'$ nel sistema di riferimento relativo, con una conseguente variazione di volume pari a δV , pur continuando a contenere la **stessa massa m** di fluido



Variazione della quantità di moto attraverso la girante

--- $t_0 \longrightarrow V_0$
--- $t_0 + dt \longrightarrow V = V_0 + \delta V_e - \delta V_c$



- La massa:

$$m = \int_{V_0} \rho \, dV$$

registrata dal sistema di riferimento relativo all'istante t_0 ha una quantità di moto $\vec{I}_w$:

$$\vec{I}_{wt_0} = \int_{V_0} \rho \, \vec{W} \, dV$$

- Per esprimere la quantità di moto della stessa massa m all'istante $t_0 + dt$, si osserva che:

$$(\rho \vec{W})_{t_0+dt} \approx (\rho \vec{W})_{t_0} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{W})_{t_0} dt$$

Variazione della quantità di moto attraverso la girante

--- t_0 $\longrightarrow$ V_0
 --- $t_0 + dt$ $\longrightarrow$ $V = V_0 + \delta V$

- All'istante $t_0 + dt$ si potrà perciò scrivere:

$$\begin{aligned}
 \vec{I}_{w_{t_0+dt}} &= \int_V (\rho \vec{W})_{t_0+dt} dV = \\
 &= \int_{V_0+dV} \left[(\rho \vec{W})_{t_0} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{W})_{t_0} dt \right] dV =
 \end{aligned}$$



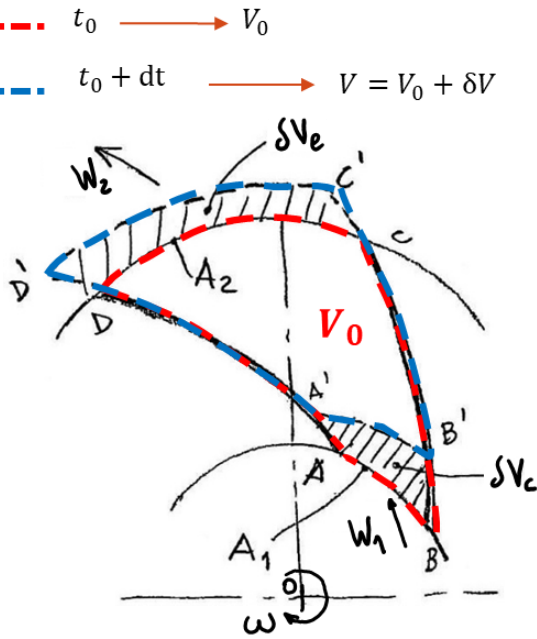
$$= \int_{V_0} (\rho \vec{W})_{t_0} dV + \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{W})_{t_0} dt dV + \int_{dV} (\rho \vec{W})_{t_0} dV + \int_{dV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{W})_{t_0} dt dV$$

$\vec{I}_{w_{t_0}}$

$d\vec{I}_w$



Variazione della quantità di moto attraverso la girante

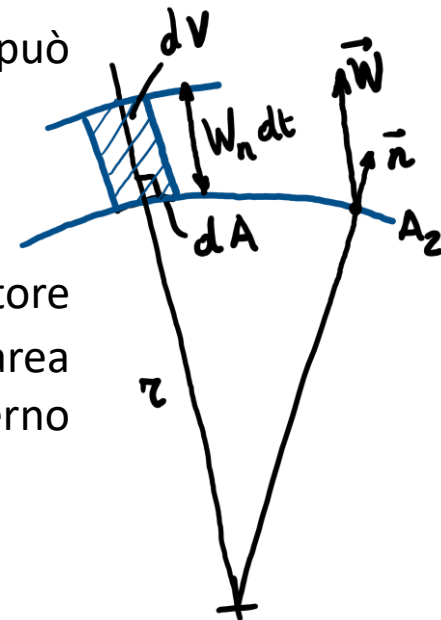


$$d\vec{I}_w = \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{w})_{t_0} dt dV + \boxed{\int_{dV} (\rho \vec{w})_{t_0} dV} + \boxed{\int_{dV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{w})_{t_0} dt dV}$$

- Riguardo agli ultimi due integrali, si può osservare che:

$$dV = W_n dA dt = \vec{W} \cdot \vec{n} dA dt$$

dove W_n è la componente del vettore velocità $\vec{W}$ ortogonale all'elemento di area dA ; $\vec{n}$ è il versore normale esterno all'elemento di area dA



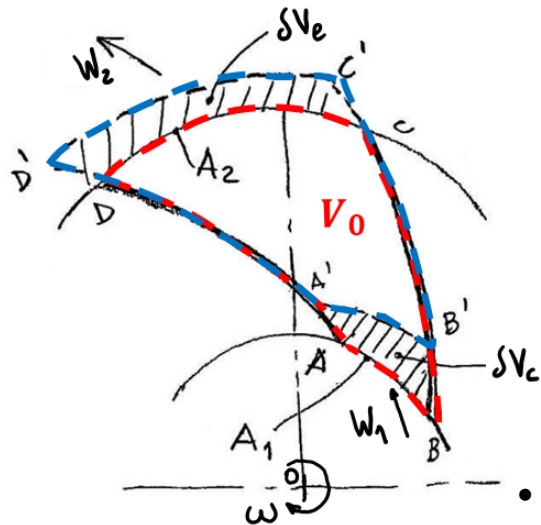
⇒ E' perciò possibile trasformare gli integrali di volume estesi a $dV = dt \int_A W_n dA$ in due integrali di superficie

Variazione della quantità di moto attraverso la girante

--- t_0 $\longrightarrow$ V_0
--- $t_0 + dt$ $\longrightarrow$ $V = V_0 + \delta V$

- I due integrali diventano:

$$dV = dt \int_A w_n dA$$



$$\begin{aligned}
 & \int_{dV} (\rho \vec{W})_{t_0} dV + \int_{dV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{W})_{t_0} dt dV = \\
 & = \int_A (\rho \vec{W})_{t_0} W_n dt dA + \int_A \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{W})_{t_0} W_n dt^2 dA
 \end{aligned}$$

dove A è la superficie che delimita la massa m all'istante t_0 ed è attraversata dalla corrente, e cioè $A = (A_1 + A_2)$

- Il **secondo integrale**, proporzionale a dt^2 , è un infinitesimo di ordine superiore rispetto al primo e può, quindi, essere **trascurato**

- La variazione $d\vec{I}_w$ della quantità di moto che interessa nel tempo dt la massa m è:

$$d\vec{I}_w = dt \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{W})_{t_0} dV + dt \left[\int_{A_2} (\rho \vec{W})_{t_0} W_n dA - \int_{A_1} (\rho \vec{W})_{t_0} W_n dA \right]$$

La velocità relativa è opposta al versore $\vec{n}$



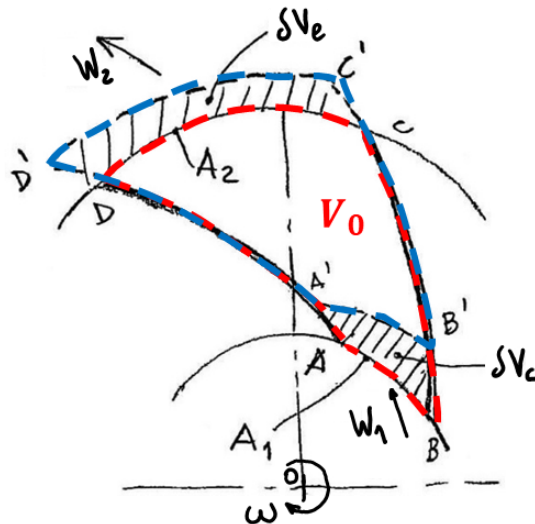
Variazione della quantità di moto attraverso la girante

$$d\vec{I}_w = dt \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{W})_{t_0} dV + dt \left[\int_{A_2} (\rho \vec{W})_{t_0} W_n dA - \int_{A_1} (\rho \vec{W})_{t_0} W_n dA \right]$$

- Pertanto, la risultante delle $\vec{F}_w$ delle forze esterne agenti sulla massa m è:

$$\vec{F}_w = \frac{d\vec{I}_w}{dt} = \boxed{\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{W})_{t_0} dV} + \int_{A_2} \rho \vec{W} W_n dA - \int_{A_1} \rho \vec{W} W_n dA$$

--- $t_0 \longrightarrow V_0$
--- $t_0 + dt \longrightarrow V = V_0 + \delta V$



esprime la **variazione nel tempo** della quantità di moto della massa m **contenuta** nel volume di controllo V_0

$$\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{W})_{t_0} dV = 0 \text{ se il regime è stazionario}$$

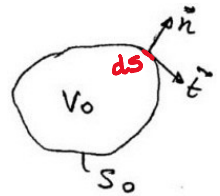
- Mi metto nelle ipotesi di regime stazionario e trascuro il termine

Variazione della quantità di moto attraverso la girante

$$\vec{F}_w = \frac{d\vec{I}_w}{dt} = \int_{A_2} \rho \vec{W} W_n dA - \int_{A_1} \rho \vec{W} W_n dA$$

risultante delle forze esterne agenti sul volume di controllo V_0 (sono comprese le interazioni che si manifestano attraverso la superficie S_0 che delimita il volume V_0)

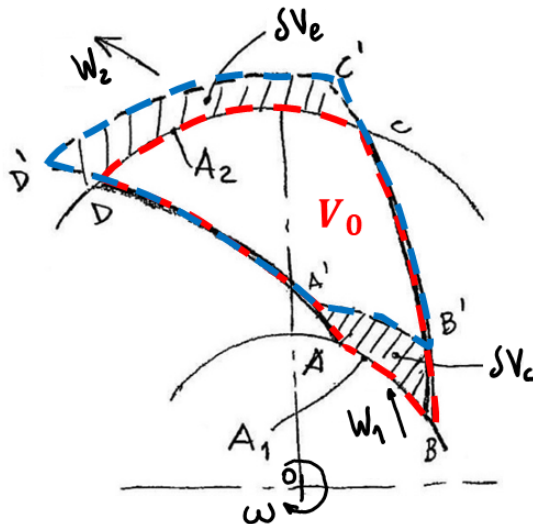
⇒ Pertanto:



$$\vec{F}_w = \int_{V_0} \rho \vec{g} dV + \int_{S_0} -\vec{n} p dS + \int_{S_0} -\vec{t} \tau_w dS$$

dove:

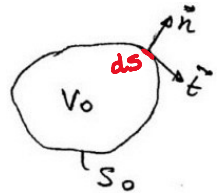
- $\vec{n}$ è la normale esterna al contorno (il cui verso è perciò contrario alla forza di pressione esercitata dall'ambiente circostante V_0)
- $\vec{t}$ il versore tangente all'elemento di contorno (il segno meno che precede $\vec{t}$ è solo per analogia a quello che precede $\vec{n}$ → si intende cioè ribadire l'azione dell'ambiente esterno sull'elemento di superficie dS che delimita V_0).



Variazione della quantità di moto attraverso la girante

- L'obiettivo è definire una relazione tra la risultante delle forze che la macchina esercita sul fluido e la variazione dell'energia del fluido

$$\vec{F}_w = \int_{V_0} \rho \vec{g} dV + \int_{S_0} -\vec{n} p dS + \int_{S_0} -\vec{t} \tau_w dS$$

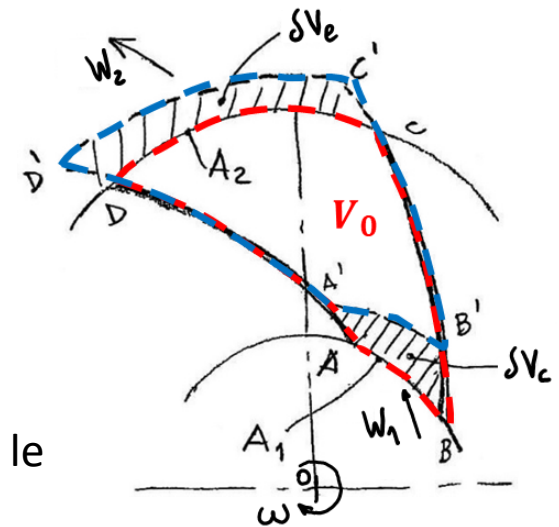


- Per esercitare delle forze sul fluido, la macchina deve necessariamente sfruttare le sue pareti solide:

$$S_{solide} = S_0 - A_1 - A_2$$

Superficie complessiva del volume V_0

Superfici non solide



- Le uniche forze che danno contributo sulle pareti fluide sono le forze di pressione e quelle degli sforzi tangenziali

Variazione della quantità di moto attraverso la girante

- L'obiettivo è definire una relazione tra la risultante delle forze che la macchina esercita sul fluido e la variazione dell'energia del fluido

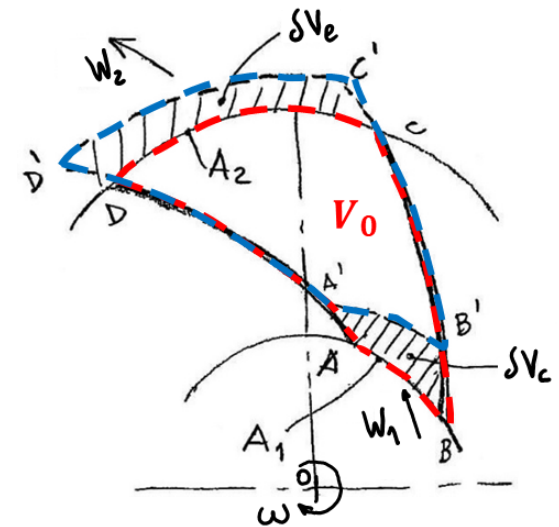
$$\vec{F}_w = \int_{V_0} \rho \vec{g} dV + \int_{S_{solide}} -\vec{n} p dA + \int_{A_1+A_2} -\vec{n} p dS + \int_{S_{solide}} -\vec{t} \tau_w dA + \int_{A_1+A_2} -\vec{t} \tau_w dS$$

$$\vec{R}_w = \int_{V_0} \rho \vec{g} dV + \int_{S_{solide}} -\vec{n} p dA + \int_{S_{solide}} -\vec{t} \tau_w dA$$

risultante delle forze esercitate dalla macchina sul fluido contenuto nel volume V_0

$$\vec{F}_w = \vec{R}_w + \int_{A_1+A_2} -\vec{n} p dA + \int_{A_1+A_2} -\vec{t} \tau_w dA$$

Spesso trascurabile perché i contributi su A_1 e A_2 sono opposti e di entità simile



Variazione della quantità di moto attraverso la girante

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{F}_w &= \frac{d\vec{I}_w}{dt} = \int_{A_2} \rho \vec{W} W_n dA - \int_{A_1} \rho \vec{W} W_n dA \\ \vec{F}_w &= \vec{R}_w + \int_{A_1+A_2} -\vec{n} p dS \end{aligned} \right.$$

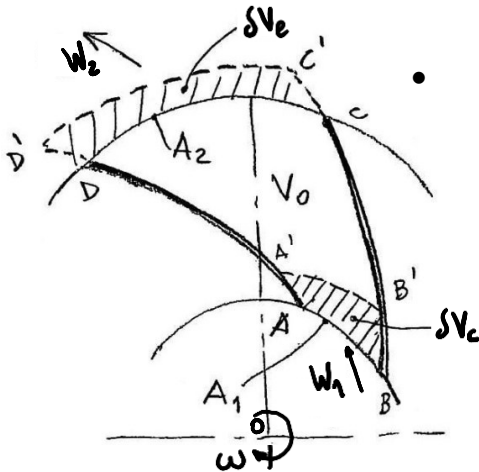


$$\vec{R}_w + \int_{A_1+A_2} -\vec{n} p dA = \int_{A_2} \rho \vec{W} W_n dA - \int_{A_1} \rho \vec{W} W_n dA$$



$$\vec{R}_w = \int_{A_1+A_2} \vec{n} p dA + \int_{A_2} \rho \vec{W} W_n dA - \int_{A_1} \rho \vec{W} W_n dA$$

Variazione della quantità di moto attraverso la girante



- L'azione complessiva **delle pareti solide sul fluido** è quindi data da:

$$\vec{R}_w = \int_{A_2} \rho \vec{W} W_n dA - \int_{A_1} \rho \vec{W} W_n dA + \int_{A_1+A_2} \vec{n} p dA$$

- L'azione complessiva **del fluido sulle pareti solide** è:

$$\vec{R}'_w = -\vec{R}_w = \int_{A_1} \rho \vec{W} W_n dA - \int_{A_2} \rho \vec{W} W_n dA - \int_{A_1+A_2} \vec{n} p dA$$

- La forza $\vec{R}_w$ è la **forza complessiva** della macchina sul fluido nel sistema di riferimento relativo (cioè per un osservatore che ruota in solido con la girante).
- Per ritrovare i risultati dell'**osservatore nel s.d.r. assoluto** occorre aggiungere i contributi delle accelerazioni di base e di Coriolis:

$$\vec{a} = \vec{a}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2 \vec{\omega} \times \vec{W}$$

Variazione della quantità di moto attraverso la girante

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{F}_w &= \frac{d\vec{I}_w}{dt} = \int_{A_2} \rho \vec{W} W_n dA - \int_{A_1} \rho \vec{W} W_n dA \\ \vec{a} &= \vec{a}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{W} \end{aligned} \right.$$

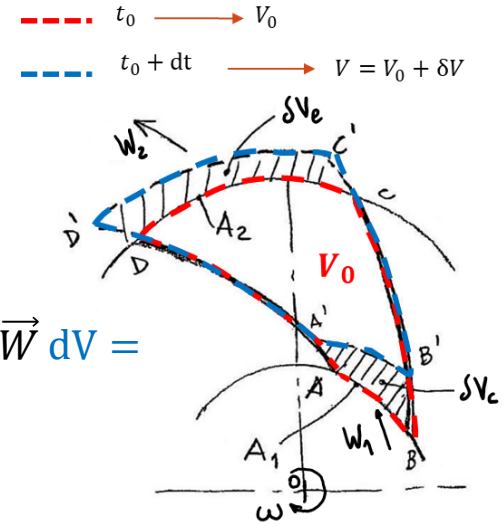
$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt} = \int_{V_0} \rho \vec{a} dV = \int_{V_0} \rho \vec{a}_R dV + \int_{V_0} \rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV + \int_{V_0} 2 \rho \vec{\omega} \times \vec{W} dV =$$

$$= \frac{d\vec{I}_w}{dt} + \int_{V_0} \rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV + \int_{V_0} 2 \rho \vec{\omega} \times \vec{W} dV =$$

$$\vec{F} = \int_{A_2} \rho \vec{W} W_n dA - \int_{A_1} \rho \vec{W} W_n dA + \int_{V_0} \rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV + \int_{V_0} 2 \rho \vec{\omega} \times \vec{W} dV$$

- Per quanto riguarda la forza $\vec{F}$ si può applicare lo stesso procedimento di scomposizione adottato nel sistema relativo, ottenendo:

$$\vec{F} = \vec{R} + \int_{A_1+A_2} -\vec{n} p dA = \int_{A_2} \rho \vec{W} W_n dA - \int_{A_1} \rho \vec{W} W_n dA + \int_{V_0} \rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV + \int_{V_0} 2 \rho \vec{\omega} \times \vec{W} dV$$



Variazione della quantità di moto attraverso la girante

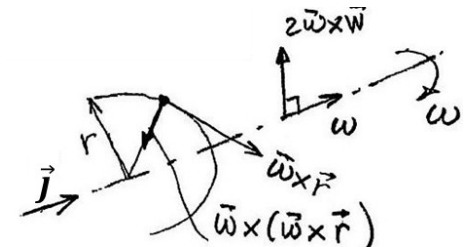
$$\vec{R} = \int_{A_2} \rho \vec{W} W_n dA - \int_{A_1} \rho \vec{W} W_n dA + \int_{A_1+A_2} \vec{n} p dA + \int_{V_0} \rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV + \int_{V_0} 2 \rho \vec{\omega} \times \vec{W} dV$$

- Nel sistema di riferimento **assoluto**, per valutare la forza esercitata dalla macchina bisogna considerare gli integrali di volume delle accelerazioni di base e di Coriolis
- Qualora l'interesse sia la **componente assiale** di $\vec{R}$ (spinta sui supporti dell'albero):

$$R_a = \vec{R} \cdot \vec{j}$$

l'espressione precedente si semplifica

- Infatti, i vettori $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ e $2\vec{\omega} \times \vec{W}$ sono ortogonali all'asse di rotazione, sicché è nulla loro componente in quella direzione



$$R_a = \vec{R} \cdot \vec{j} = \int_{A_2} \vec{j} \cdot \vec{W} \rho W_n dA - \int_{A_1} \vec{j} \cdot \vec{W} \rho W_n dA + \int_{A_2} \vec{j} \cdot \vec{n} p dA + \int_{A_1} \vec{j} \cdot \vec{n} p dA$$

Spinta assiale

$$R_a = \vec{R} \cdot \vec{j} = \int_{A_2} \vec{j} \cdot \vec{W} \rho W_n dA - \int_{A_1} \vec{j} \cdot \vec{W} \rho W_n dA + \int_{A_2} \vec{j} \cdot \vec{n} p dA + \int_{A_1} \vec{j} \cdot \vec{n} p dA$$

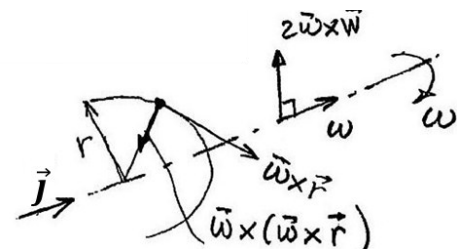
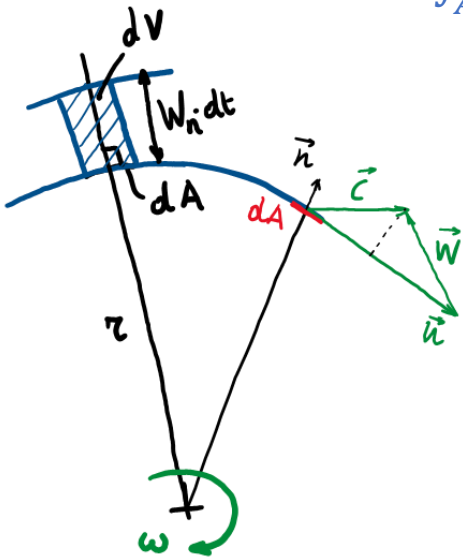
$$dQ_v = W_n dA = C_n dA$$

- Alla medesima equazione si porrebbe anche se nella relazione precedente si sostituisse la velocità relativa $\vec{W}$ con quella assoluta $\vec{C}$ poiché:

$$\vec{C} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{W} \Rightarrow \vec{C} \cdot \vec{j} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{j} + \vec{W} \cdot \vec{j} = \vec{W} \cdot \vec{j}$$

$$\Rightarrow R_a = \int_{A_2} \vec{j} \cdot \vec{C} \rho dQ_v - \int_{A_1} \vec{j} \cdot \vec{C} \rho dQ_v + \int_{A_2} \vec{j} \cdot \vec{n} p dA + \int_{A_1} \vec{j} \cdot \vec{n} p dA$$

- La spinta assiale del fluido sui supporti dell'albero è: $\vec{R}'_a = -\vec{R}_a$





Esercizio

Spinta Assiale

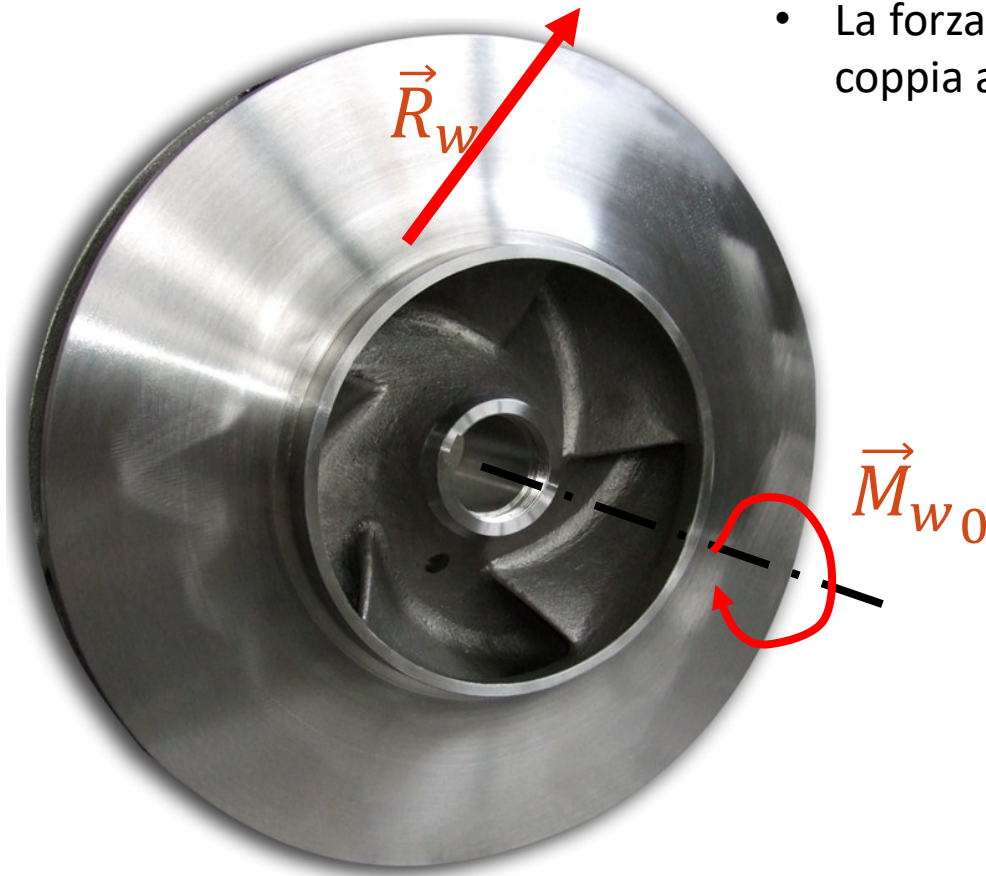
Principio di variazione del momento della quantità di moto

Variazione del momento della quantità di moto

- Il passaggio di una massa fluida attraverso la girante di una macchina idraulica determina l'insorgere di una forza risultante $\vec{R}_w$

- La forza risultante $\vec{R}_w$ determina l'insorgere di una coppia all'albero:

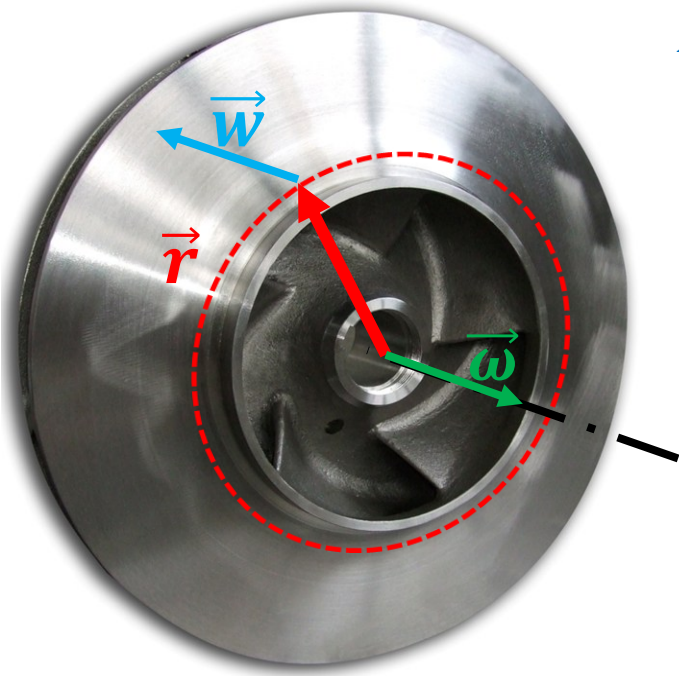
$$\vec{M}_{w0} = \vec{r} \times \vec{R}_w$$



Variazione del momento della quantità di moto

$$\vec{R}_w = \int_{A_2} \rho \vec{W} W_n dA - \int_{A_1} \rho \vec{W} W_n dA + \int_{A_2} \vec{n} p dA + \int_{A_1} \vec{n} p dA$$

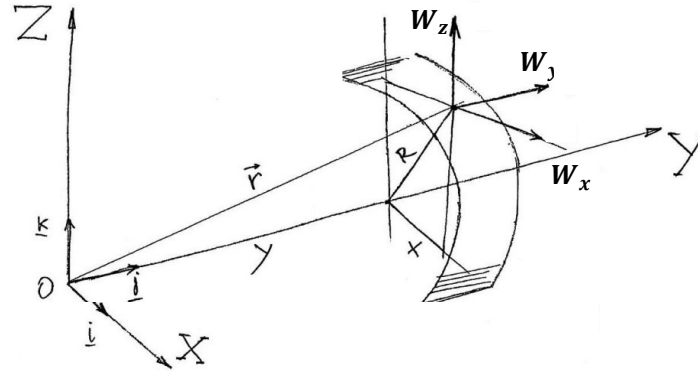
(regime di moto stazionario)



$$\vec{M}_{w_0} = \vec{r} \times \vec{R}_w$$

$$\vec{M}_{w_0} = \int_{A_2} \vec{r} \times \vec{W} \rho W_n dA - \int_{A_1} \vec{r} \times \vec{W} \rho W_n dA + \int_{A_2} \vec{r} \times \vec{n} p dA + \int_{A_1} \vec{r} \times \vec{n} p dA$$

Variazione del momento della quantità di moto



$$\vec{M}_{w_0} = \int_{A_2} \vec{r} \times \vec{W} \rho W_n dA - \int_{A_1} \vec{r} \times \vec{W} \rho W_n dA + \cancel{\int_{A_2} \vec{r} \times \vec{n} p dA} + \cancel{\int_{A_1} \vec{r} \times \vec{n} p dA}$$

- Nelle applicazioni interessa la componente del momento $\vec{M}_{w_0}$ lungo l'asse passante per O coincidente con l'asse di rotazione della girante:

$$\vec{M}_{w_a} = \vec{j} (\vec{M}_{ow} \cdot \vec{j})$$

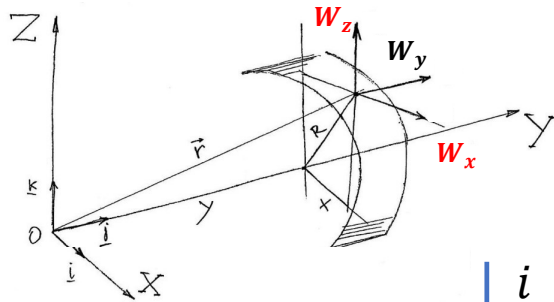
- Le superfici A_1 e A_2 sono di **rivoluzione** $\rightarrow$ il versore $\vec{n}$ non ha componente tangenziale

$\Rightarrow$ Sono pertanto **nulli** gli integrali dei momenti dovuti alle forze di pressione agenti sulle superfici A_1 e A_2 .



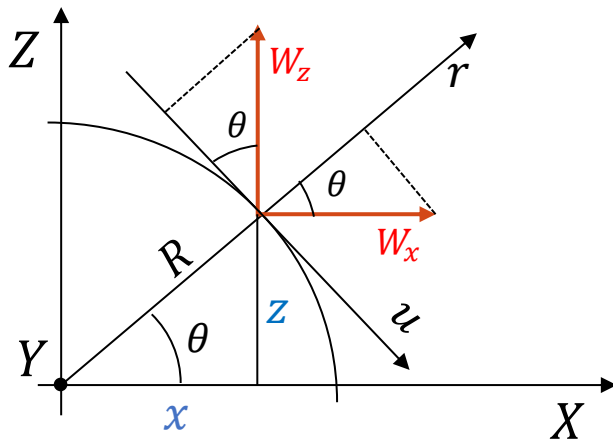
Variazione del momento della quantità di moto

$$\vec{M}_{wa} = \vec{j} (\vec{M}_{ow} \cdot \vec{j}) = \vec{j} \left[\int_{A_2} \vec{j} \cdot [\vec{r} \times \vec{W}] \rho W_n dA + - \int_{A_1} \vec{j} \cdot [\vec{r} \times \vec{W}] \rho W_n dA \right]$$



- Indicando con $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ e $\vec{W} \equiv (W_x, W_y, W_z)$ le componenti del raggio vettore $\vec{r}$ e della velocità $\vec{W}$ rispetto al sistema di riferimento cartesiano, si ottiene:

$$\vec{r} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} = \underline{i}(W_z y - W_y z) + \underline{j}(W_x z - W_z x) + \underline{k}(W_y x - W_x y)$$



- Interessa il momento lungo l'asse di rivoluzione Y , pertanto:

$$\vec{M}_y = \vec{j} (W_x z - W_z x)$$

Variazione del momento della quantità di moto

$$\vec{M}_{wa} = \vec{j} (\vec{M}_{0w} \cdot \vec{j}) = \vec{j} \left[\int_{A_2} \boxed{\vec{j} \cdot \vec{r} \times \vec{W}} \rho W_n dA + - \int_{A_1} \boxed{\vec{j} \cdot \vec{r} \times \vec{W}} \rho W_n dA \right]$$

$$\vec{M}_y = \vec{j} (W_x z - W_z x)$$

- Passando a coordinate cilindriche, si ottiene:

$$W_r = W_x \cos \theta + W_z \sin \theta$$

$$W_u = W_x \sin \theta - W_z \cos \theta$$

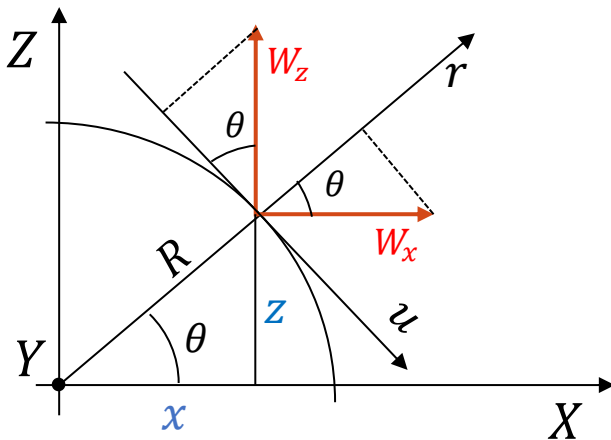
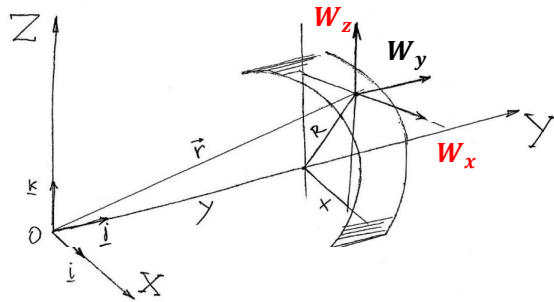
$$\sin \theta = \frac{z}{R} \quad \cos \theta = \frac{x}{R}$$

e quindi:

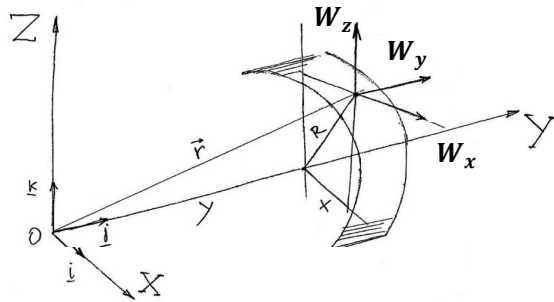
$$\vec{M}_y = \vec{j} R W_u$$



$$\vec{M}_{wa} = \vec{j} \left[\int_{A_2} R W_u \rho W_n dA - \int_{A_1} R W_u \rho W_n dA \right]$$



Variazione del momento della quantità di moto

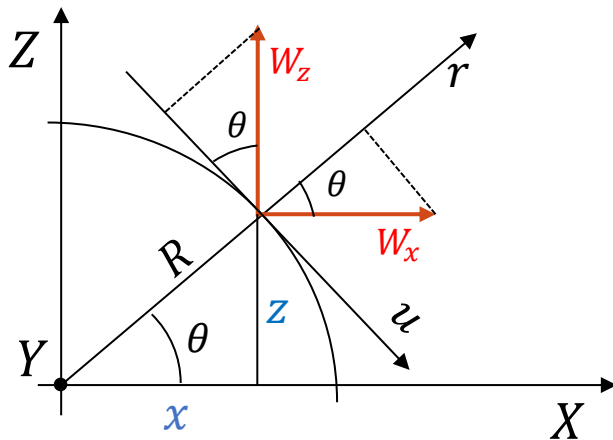


$$\vec{M}_{w_a} = \vec{j} \left[\int_{A_2} \overline{R W_u} \rho W_n dA - \int_{A_1} \overline{R W_u} \rho W_n dA \right]$$

dQ_m dQ_m

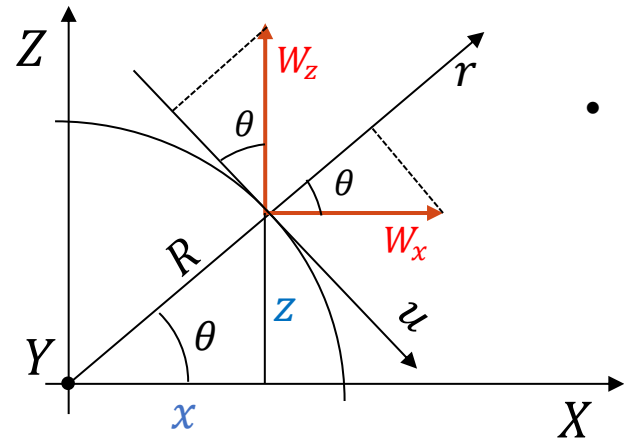
$$\vec{M}_{w_a} = \vec{j} Q_m (\overline{R_2 W_{u_2}} - \overline{R_1 W_{u_1}})$$

dove $\overline{R W_u}$ è il valor medio di $R W_u$ lungo la sezione di flusso



- Se con Q_m s'intende la portata di massa che attraversa l'intera girante e non un semplice condotto interpolare, $\vec{M}_{w_a}$ dà il momento lungo l'asse agente globalmente sulla girante a seguito della sua interazione con il fluido

Variazione del momento della quantità di moto



$$\vec{M}_{w_a} = \vec{j} Q_m (\overline{R_2 W_{u_2}} - \overline{R_1 W_{u_1}})$$

- Per ottenere il **momento complessivo** fornito dal motore nel sistema di riferimento assoluto, occorre aggiungere al momento $\vec{M}_{w_a}$ del riferimento relativo i momenti dovuti alle forze centripete $\rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV$ e alle forze di Coriolis $\rho 2 \vec{\omega} \times \vec{W} dV$

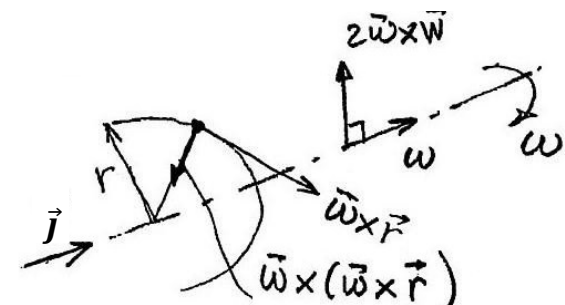
Momento dovuto alle forze centripete

- La componente lungo l'asse delle forze centripete è **nulla**. Infatti:

$$\vec{j} \cdot \int_{V_0} \vec{r} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \rho dV \equiv 0$$

perché $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ ha direzione radiale e dunque:

$$\vec{r} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \equiv 0.$$



Variazione del momento della quantità di moto

Momento dovuto alle forze di Coriolis

Il contributo legato alle forze di Coriolis è:

$$\vec{J} \cdot \int_{V_0} \vec{r} \times (2\vec{\omega} \times \vec{W}) \rho dV = \vec{J} \cdot \int_{V_0} \vec{r} \times [\vec{\omega} \times (\vec{W}_y + \vec{W}_u + \vec{W}_r)] 2\rho dV$$

Si osserva:

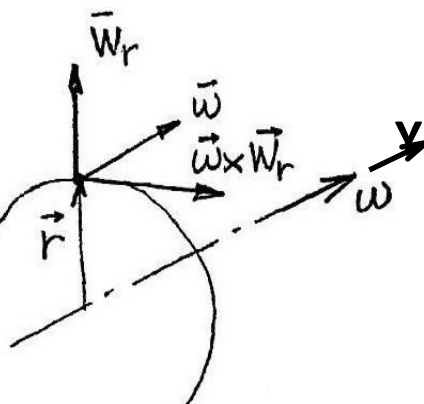
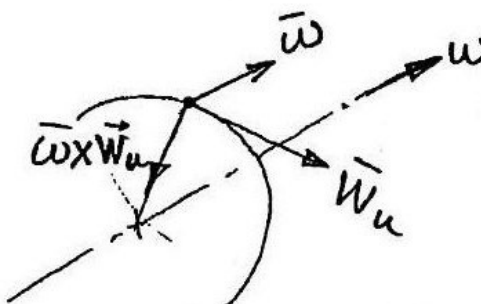
$$\vec{\omega} \parallel \vec{W}_y \Rightarrow |\vec{\omega} \times \vec{W}_y| = 0$$

$$\vec{\omega} \times \vec{W}_u \parallel \vec{r} \Rightarrow |\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{W}_u)| = 0$$

Rimane:
$$\vec{J} \cdot \int_{V_0} 2 \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{W}_r) \rho dV$$

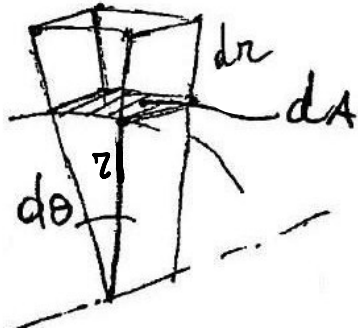
ed è un momento lungo l'asse della girante il cui modulo vale:

$$\int_{V_0} 2 \omega r W_r \rho dV$$



Variazione del momento della quantità di moto

Momento dovuto alle forze di Coriolis



- In coordinate cilindriche $dV = r d\vartheta dy dr = dA dr$, cosicché:

$$\int_{V_0} 2\omega r W_r \rho dV = \int_{R_1}^{R_2} 2\omega r dr \int_A \rho W_r dA$$

dove R_1 e R_2 sono i raggi che delimitano il condotto interpallare.

- L'integrale:

$$\int_A \rho W_r dA = Q_m$$

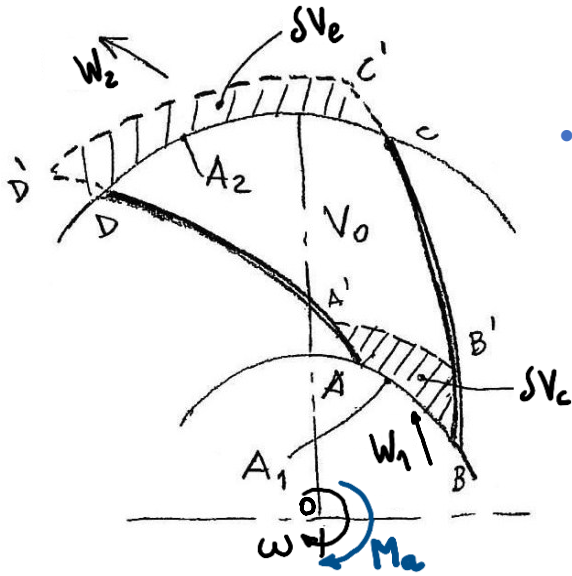
è la portata di massa Q_m che attraversa il condotto interpallare se $\theta = 2\pi/z$ oppure la portata di massa che attraversa la girante se $\theta = 2\pi$



$$M_{Coriolis} = \int_{V_0} 2\omega r W_r \rho dV = \int_{R_1}^{R_2} 2\omega r Q_m dr = Q_m \omega (R_2^2 - R_1^2)$$



Variazione del momento della quantità di moto



Momento complessivo

- Riassumendo, al momento dovuto alla variazione del momento della quantità di moto della corrente relativa :

$$M_{w_a} = Q_m (\overline{R_2 W_{u_2}} - \overline{R_1 W_{u_1}})$$

deve essere aggiunto quello dovuto alle forze di Coriolis

$$M_{Coriolis} = \int_{V_0} 2 \omega r W_r \rho dV = Q_m \omega (R_2^2 - R_1^2)$$

cosicché il momento complessivo agente sull'albero risulta pari a:

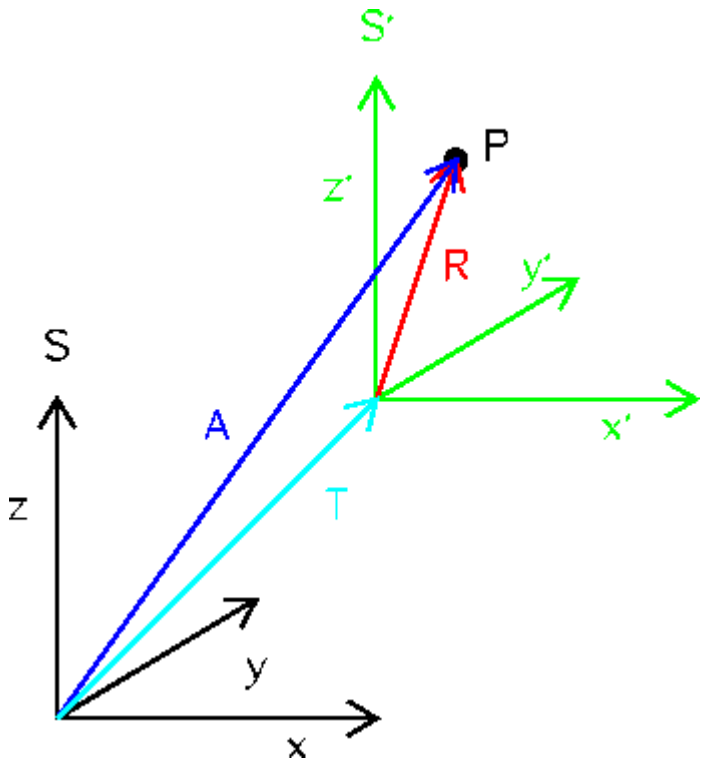
$$M_a = M_{w_a} + M_{Coriolis} = Q_m [(\overline{R_2 W_{u_2}} + \omega R_2^2) - (\overline{R_1 W_{u_1}} + \omega R_1^2)] =$$

$$= Q_m [R_2 (\overline{W_{u_2}} + \omega R_2) - R_1 (\overline{W_{u_1}} + \omega R_1)]$$

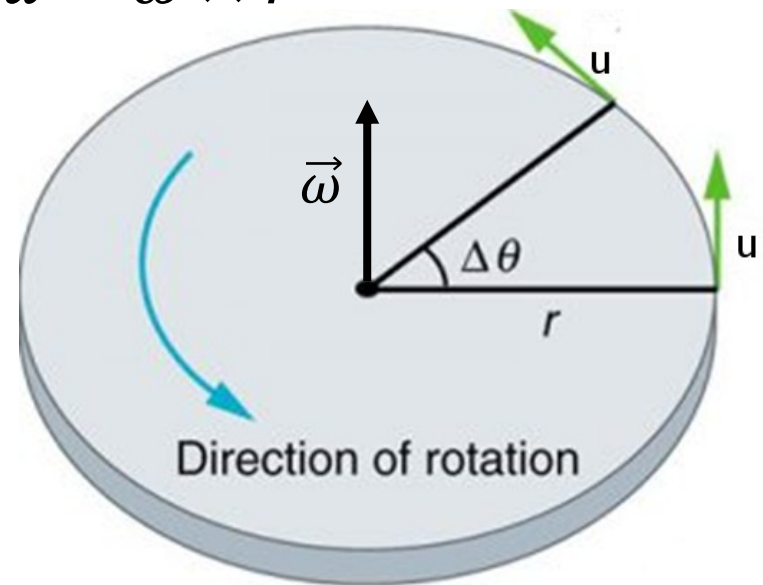
?

Sistemi di riferimento

$$\vec{A} = \vec{T} + \vec{R} \quad \Longrightarrow \quad \vec{C} = \vec{U} + \vec{W}$$

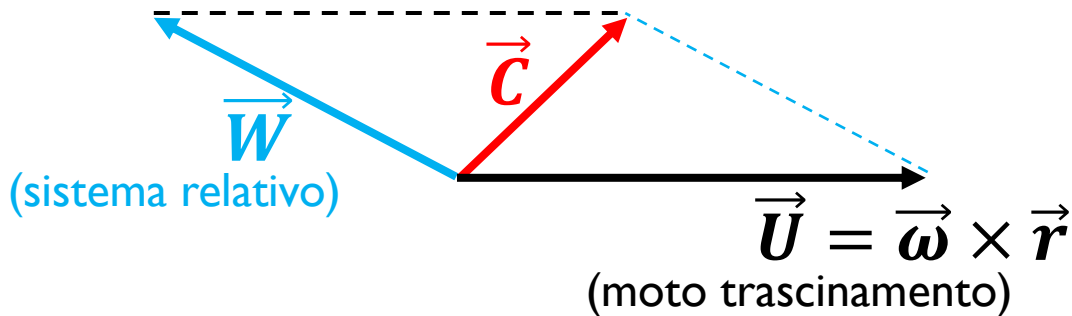


$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



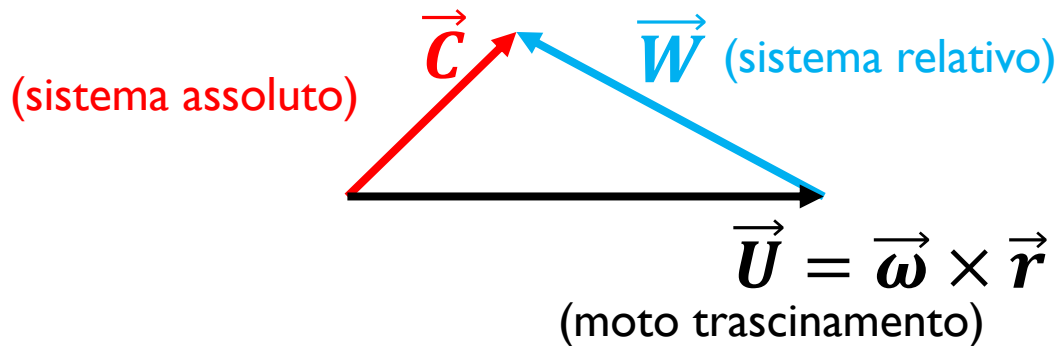
Triangolo delle velocità

Rappresentazione Vettoriale



$$\vec{C} = \vec{U} + \vec{W}$$

Triangolo delle velocità

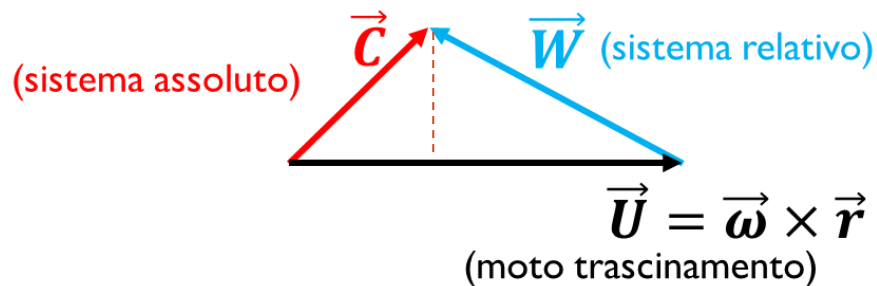


Variazione del momento della quantità di moto

Momento complessivo

$$M_a = M_{w_a} + M_{coriolis} = Q_m [R_2 (W_{u_2} + \omega R_2) - R_1 (W_{u_1} + \omega R_1)]$$

Triangolo delle velocità



$$\vec{C}_u = \vec{W}_u + \vec{U} = \vec{W}_u + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$M_a = Q_m (\overline{R_2 C_{u_2}} - \overline{R_1 C_{u_1}})$$

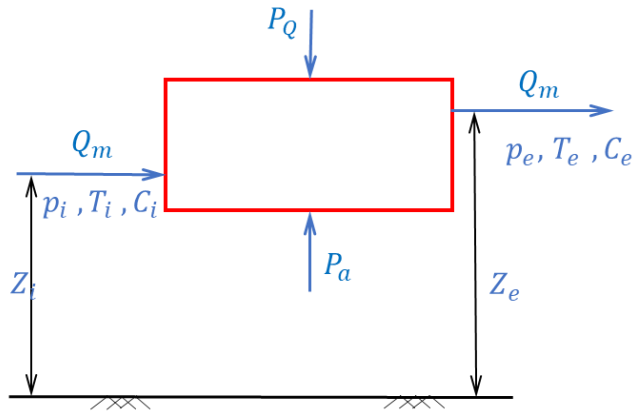


Scambio di energia

Macchina motrice e operatrice e Rendimento idraulico

Scambio di energia

- Per il primo principio della termodinamica: $P_{alb} = Q_m (H_e^0 - H_i^0)$



- No perdite meccaniche e no trafilamenti di portata

$$\Rightarrow P_{mecc} = 0 \text{ e } Q_{vf} = 0$$

- Processo adiabatico $\Rightarrow P_Q = 0$

- Per il principio di variazione del momento della quantità di moto:

$$P_{alb} = M_a \omega = Q_m (\overline{R_2 C_{u_2}} - \overline{R_1 C_{u_1}}) \omega$$

da cui:

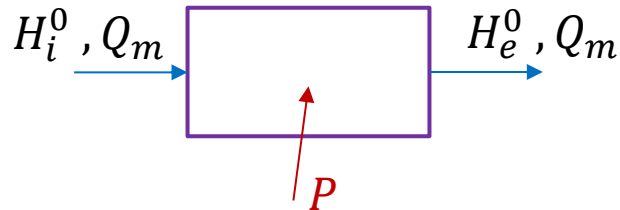
$$\Delta H^0 = \frac{P_{alb}}{Q_m} = \frac{M_a \omega}{Q_m} = (\overline{R_2 C_{u_2}} - \overline{R_1 C_{u_1}}) \omega = U_2 C_{u_2} - U_1 C_{u_1}$$



Scambio di energia

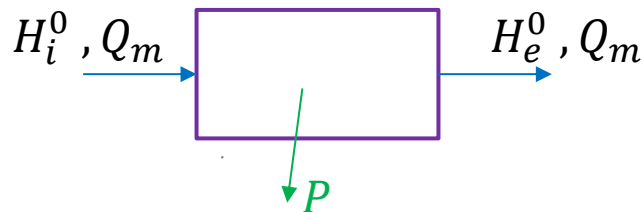
$$\Delta H^0 = H_e^0 - H_i^0 = U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}$$

$$\left[\frac{J}{kg} \right]$$



MACCHINA OPERATRICE

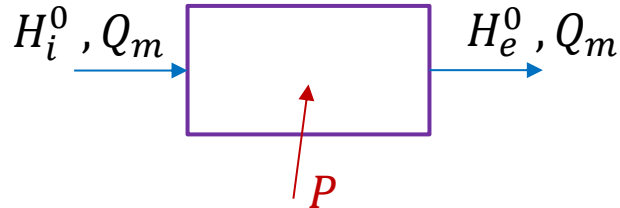
- E' opportuno ribadire che la variazione di entalpia totale ΔH^0 rappresenta il lavoro meccanico $L = U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}$ richiesto a una **turbomacchina operatrice** (pompa, ventilatore, compressore) per consentire a 1 kg di fluido di sopperire non solo alla **differenza di energia** tra gli ambienti di aspirazione e mandata, ma anche alle **perdite fluidodinamiche** interne alla macchina



MACCHINA MOTRICE

- Oppure, l'energia meccanica $L = U_1 C_{u1} - U_2 C_{u2}$ che si rende disponibile all'albero di una **turbomacchina motrice** (turbina) a seguito della variazione di entalpia totale $\Delta H^0 = H_i^0 - H_e^0$ di 1 kg di fluido che, oltre a L , deve sopperire anche alle perdite fluidodinamiche interne alla macchina

Scambio di energia – macchine operatrici



MACCHINA OPERATRICE

$$\Delta H^0 = H_e^0 - H_i^0 = U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1} \left[\frac{J}{kg} \right]$$

turbomacchina operatrice che
opera su un fluido incompressibile

$$\Delta H^0 = H_e^0 - H_i^0 = \frac{p_e^0}{\rho} - \frac{p_i^0}{\rho} + (u_e - u_i) = gh_t$$

Incremento di energia interna
derivante dalla degradazione di
energia in calore a seguito degli
attriti fluidodinamici interni

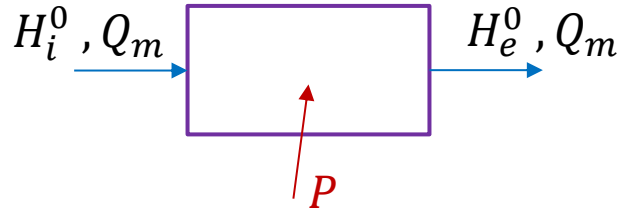
$$gh = \frac{p_e^0}{\rho} - \frac{p_i^0}{\rho} = \left(\frac{p_e}{\rho} + \frac{C_e^2}{2} + gz_e \right) - \left(\frac{p_i}{\rho} + \frac{C_i^2}{2} + gz_i \right)$$

Energia ottenuta dal fluido: **minimo lavoro** meccanico richiesto

PREVALENZA



Scambio di energia – Rendimento Idraulico



MACCHINA OPERATRICE

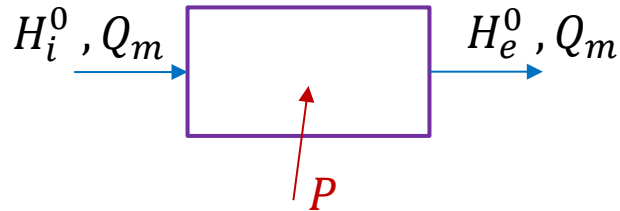
- Si definisce **rendimento idraulico** η_{id} il rapporto:

$$\eta_{id} = \frac{\frac{(p_e^0 - p_i^0)}{\rho}}{L} = \frac{gh}{\Delta H^0} = \frac{gh}{U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}} = \frac{gh}{gh_t}$$

per le turbomacchine operatrici

Tiene conto unicamente delle **perdite per attriti fluidodinamici interni** alla macchina!!

Scambio di energia – Rendimento Idraulico

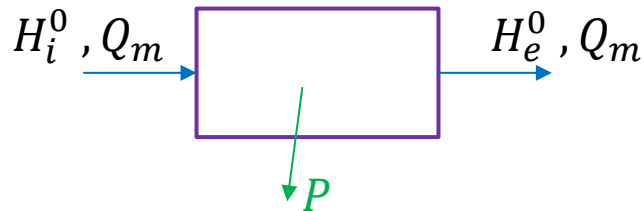


MACCHINA OPERATRICE

- Si definisce **rendimento idraulico** η_{id} il rapporto:

$$\eta_{id} = \frac{\frac{(p_e^0 - p_i^0)}{\rho}}{L} = \frac{gh}{\Delta H^0} = \frac{gh}{U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}}$$

per le turbomacchine operatrici, e:



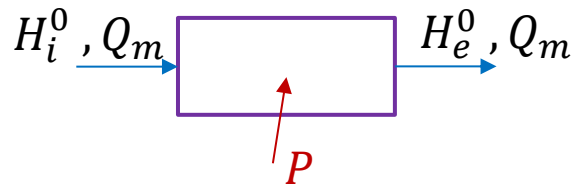
MACCHINA MOTRICE

$$\eta_{id} = \frac{\frac{L}{(p_i^0 - p_e^0)}}{\rho} = \frac{\Delta H^0}{gh} = \frac{U_1 C_{u1} - U_2 C_{u2}}{gh}$$

per le turbomacchine motrici

Tiene conto unicamente delle **perdite per attriti fluidodinamici interni** alla macchina!!

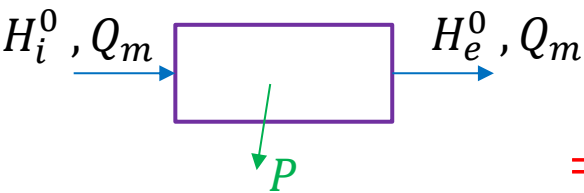
Scambio di energia – Fluidi Comprimibili



I principio della termodinamica
per macchina operatrice

- Per i fluidi comprimibili gli **attriti** fluidodinamici interni alla macchina si riflettono sempre in un **aumento dell'energia interna**, ma **non ne rappresentano** la totalità a causa della variazione di temperatura che accompagna la compressione o l'espansione del gas

⇒ Difficile separare gli effetti come nel caso di fluido incompressibile



I principio della termodinamica
per macchina motrice

- Il **lavoro minimo** di compressione, o quello **massimo** di espansione, si possono ottenere solo con le ipotesi di fluido perfetto (attriti fluidodinamici nulli) e di processo adiabatico, ovvero per un **processo isoentropico**

⇒ L'efficacia del processo reale di compressione o di espansione è riassunta dai rispettivi rendimenti isoentropici:

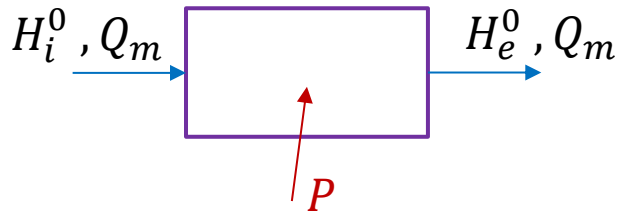
$$\eta_{is\text{compressore}} = \frac{\Delta H_{is}^0}{\Delta H^0} = \frac{\Delta H_{is}^0}{U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}}$$

$$\eta_{is\text{turbina}} = \frac{\Delta H^0}{\Delta H_{is}^0} = \frac{U_1 C_{u1} - U_2 C_{u2}}{\Delta H_{is}^0}$$

Scambio di energia

Turbomacchine vs. Macchine Volumetriche

Turbomacchine vs. macchine volumetriche

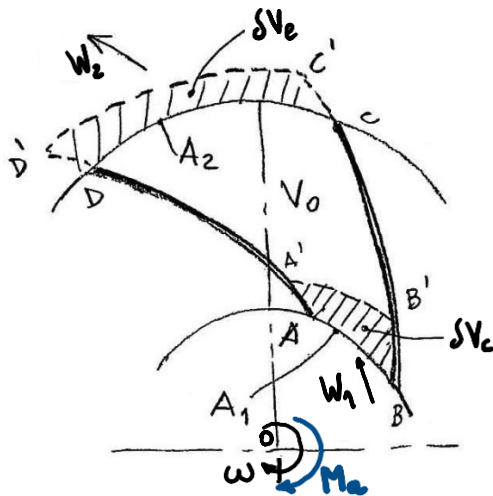


- Un'ultima importante osservazione sullo scambio di energia nelle turbomacchine:

$$\Delta H^0 = \frac{P_{alb}}{Q_m} = \frac{M_a \omega}{Q_m} = (R_2 C_{u2} - R_1 C_{u1}) \omega = U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}$$

⇒ Lo **scambio di energia** per unità di massa ΔH^0 dipende:

- dalle caratteristiche geometriche della girante (R_1 e R_2)
- dalle velocità assolute C e relative W del fluido, e quindi dalla portata e dalla geometria delle pale e del condotto meridiano
- dalla velocità angolare ω della girante
- ma **non** dipende dalla densità ρ del fluido



⇒ Rispetto alle macchine volumetriche, lo **scambio di energia** nelle turbomacchine è strettamente legato alla **geometria** della **girante**, alla **portata** e al **regime di rotazione** della girante

Domande, Curiosità, Dubbi, Perplessità?

PROF. ING. ALBERTO BENATO, PH.D.

ASSOCIATE PROFESSOR

TURBOMACHINERY & ENERGY SYSTEMS GROUP

DEPARTMENT OF INDUSTRIAL ENGINEERING - UNIVERSITY OF PADOVA
VIA VENEZIA 1 - 35131 - PADOVA
BLDG. EX DIM - 5TH FLOOR - ROOM 19

TEL. 049 827 6752

MAIL: ALBERTO.BENATO@UNIPD.IT

WEBSITE: RESEARCH.DII.UNIPD.IT/TES/

