ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2023-2024

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

14 luglio 2025

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{2x}{x-2}\right)$$

(a) Determinare il dominio, il segno, eventuali simmetrie o periodicità ;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f,

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f,

(d) studiare la concavità e la convessità della funzione e gli eventuali flessi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Soluzione

(a) La funzione ha come dominio gli x tali che $\frac{2x}{x-2} > 0$ e $x \neq 2$, cioè $D = (-\infty, 0) \cap (2, +\infty)$. La funzione è positiva quando $\frac{2x}{x-2} > 1$ cioè quando $\frac{2x}{x-2} - 1 > 0$ che equivale a $\frac{x+2}{x-2} > 0$ cioè in $(-\infty, -2) \cap (2, +\infty)$. Non ci sono ne' simmetrie ne' periodicità.

(b) Calcolo i limiti significativi:

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{2x}{x-2}\right) = \log 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \log\left(\frac{2x}{x-2}\right) = \log 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} \log\left(\frac{2x}{x-2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \log\left(\frac{2x}{x-2}\right) = +\infty$$

. Quindi la funzione ha un asintoto orizzontale in $y = \log 2$ sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$ ed ha asintoti verticali per $x \to 0^-$ e per $x \to 2^+$.

(c) La funzione è continua e derivabile nel suo dominio. Calcolo la derivata di f:

$$f'(x) = \left(\frac{x-2}{2x}\right)\frac{(-4)}{(x-2)^2} = \frac{-2}{x(x-2)}$$

Non ci sono punti critici per f cioè soluzioni di $f'(x) = 0$. Inoltre $f'(x) < 0$ nel dominio quindi la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(2, \infty)$.

(d) calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{4(x-1)}{(x(x-2))^2}$$

quindi la funzione è concava per $x < 0$ e convessa per $x > 2$

Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\,x^\alpha\, \sin x}{1-\cos x + 5\,x^3}.$$

Soluzione 1) Utilizziamo i polinomi di Taylor. Poiché $\sin x = x + o(x)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ il limite equivale a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\,x^\alpha\,(x+o(x))}{\frac{x^2}{2} + o(x^2) + 5\,x^3} = \lim_{x\to 0^+} 2\,\frac{3\,x^{\alpha+1}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} 6\,x^{\alpha-1}.$$

Quindi il limite è uguale a 0 se $\alpha > 1$, è uguale a $+\infty$ se $\alpha < 1$, è uguale a 6 se $\alpha = 1$,

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare le primitive

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{(\cos x)^2 + 4}\,dx.$$

Soluzione Usiamo il cambio di variabile $\cos x = y$. L'integrale diventa

$$-\int_1^{-1} \frac{1}{y^2+4}\,dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{y^2+4}\,dy.$$

Poiché $y^2 + 4 > 0$, cioè non ha radici reali, ottengo

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{y^2+4}\,dy = \frac{1}{4}\int_{-1}^1 \frac{1}{(y/2)^2+1}\,dy.$$

Con la sostituzione $y/2 = t$ si ottiene che l'integrale è uguale a

$$\frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{(t)^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\arctan t\,\Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{2}\Big(\arctan(1/2) - \arctan(-1/2)\Big) = \arctan(1/2)$$

Esercizio 4 (8 punti)

Esercizio 4 (8 punti)
Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie a termini di segno alternato

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3n-5}\right)$$

Soluzione

La serie non converge assolutamente perché $\frac{1}{3n-5} \sim \frac{1}{3n}$ e la serie $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n}$ non converge. Vediamo se converge (semplicemente). Usiamo il criterio di Leibniz: il termine $\frac{1}{3n-5}$ tende a 0 se $n \to +\infty$ e inoltre $\frac{1}{3n-5}$ è una successione decrescente perché è il reciproco di una crescente. Quindi dal criterio di Leibniz la serie converge.