SEGNALI E SISTEMI
4 luglio 2025
secondo appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2024-2025)
SOLUZIONI

Esercizio 1 [punti 7]

Si considerino i segnali a tempo continuo

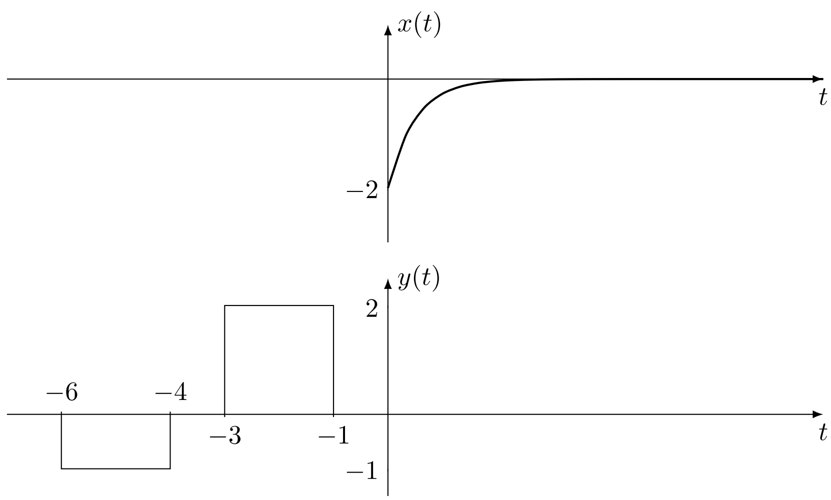
$$x(t) = -2\,e^{-2t}\,1(t)\ , \qquad y(t) = -\operatorname{rect}\left(\tfrac{t+5}{2}\right) + 2\operatorname{rect}\left(\tfrac{t+2}{2}\right)$$

Si chiede di:

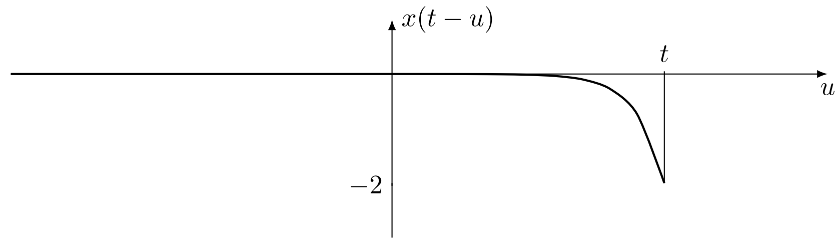
1. disegnare i segnali $x(t)$ e $y(t)$; [1 punto]
2. calcolare la convoluzione $z(t) = x * y(t)$; [4 punti]
3. calcolare le aree dei tre segnali, A_x, A_y e A_z. [2 punti]

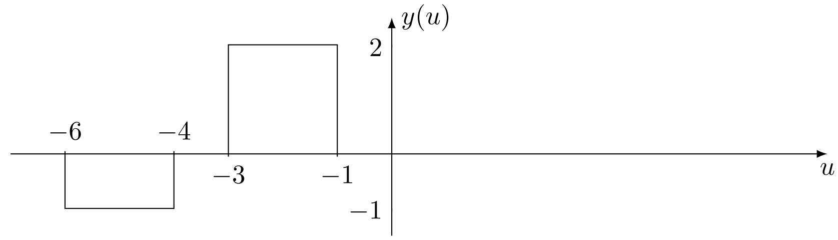
Soluzione.

1. I segnali sono mostrati in figura:



2. Approcciamo la convoluzione tramite metodo grafico tenendo fermo $y(t)$ e ribaltando a traslando $x(t)$, come illustrato in figura





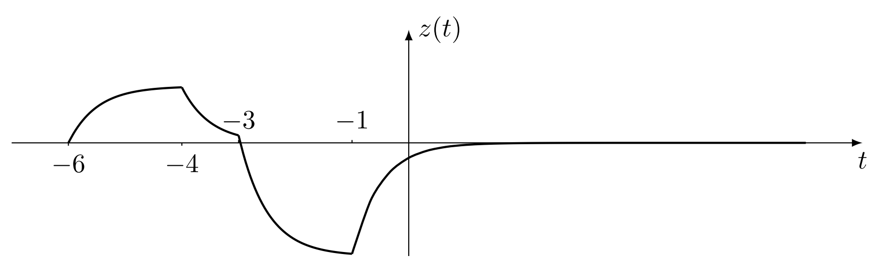
da cui si ottiene

$$z(t) = \begin{cases} 0 & , t \le -6 \\ 2\int_{-6}^{t} e^{-2(t-u)}du & , -6 < t \le -4 \\ 2\int_{-6}^{-4} e^{-2(t-u)}du & , -4 < t \le -3 \\ 2\int_{-6}^{-4} e^{-2(t-u)}du - 4\int_{-3}^{t} e^{-2(t-u)}du & , -3 < t \le -1 \\ 2\int_{-6}^{-4} e^{-2(t-u)}du - 4\int_{-3}^{-1} e^{-2(t-u)}du & , -1 < t \end{cases}$$

ovvero

$$z(t) = \begin{cases} 0 & , t \le -6 \\ 1 - e^{-2(t+6)} & , -6 < t \le -4 \\ e^{-2(t+4)} - e^{-2(t+6)} & , -4 < t \le -3 \\ e^{-2(t+4)} - e^{-2(t+6)} - 2\big(1 - e^{-2(t+3)}\big) & , -3 < t \le -1 \\ e^{-2(t+4)} - e^{-2(t+6)} - 2\big(e^{-2(t+1)} - e^{-2(t+3)}\big) & , -1 < t \end{cases}$$

come illustrato in figura



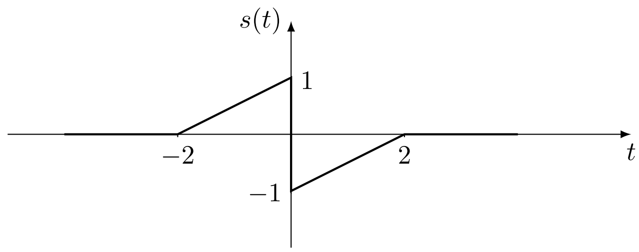
3. Si ha

$$A_x = -2\int_0^{\infty} e^{-2t}dt = -1\ , \qquad A_y = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 2\ ,$$

e per la regola dell'area $A_z = A_x \cdot A_y = -2$.

Esercizio 2 [punti 7]

Sia dato il segnale $s(t)$ illustrato in figura.



1. Calcolare la trasformata di Fourier $S(j\omega)$. [5 punti]

2. Identificare le simmetrie del segnale $s(t)$ e della trasformata di Fourier $S(j\omega)$. [2 punti]

Soluzione.

1. Possiamo procedere utilizzando la regola di derivazione, tramite cui si ottiene
$$x(t) = s'(t) = \tfrac{1}{2}\ \mathrm{rect}(\tfrac{t}{4}) - 2\delta(t)$$
la cui trasformata è
$$X(j\omega) = \tfrac{1}{2} \cdot 4\mathrm{sinc}(\tfrac{4\omega}{2\pi}) - 2 = 2\Big(\mathrm{sinc}(\tfrac{\omega}{\pi/2}) - 1\Big) = j\omega\, S(j\omega)$$
Essendo il valore medio del segnale $m_s = 0$ non vi sono termini impulsivi in $S(j\omega)$, da cui
$$S(j\omega) = \begin{cases} \dfrac{X(j\omega)}{j\omega} = 2\dfrac{\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi/2}) - 1}{j\omega} & , \omega \neq 0 \\ A_s = 0 & , \omega = 0 \end{cases}$$

2. Il segnale ha evidentemente simmetria reale e dispari, per cui la trasformata sarà necessariamente immaginaria e dispari, come infatti è.

Esercizio 3 [punti 7]

Sia dato il sistema a tempo discreto LTI causale descritto dall'equazione alle differenze

$$y(n) - \tfrac{1}{20}y(n-1) - \tfrac{1}{20}y(n-2) = x(n) - \tfrac{1}{3}x(n-1)$$

1. Trovare la funzione di trasferimento. [1 punto]
2. Dire se il sistema è BIBO stabile, motivando la risposta. [2 punti]
3. Calcolare la risposta impulsiva. [3 punti]
4. Trovare i "modi" del sistema, ovvero le forme d'onda base che definiscono l'evoluzione libera. [1 punto]

Soluzione.

1. La funzione di trasferimento si trova per ispezione
$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{20}z^{-1} - \frac{1}{20}z^{-2}} = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{5}z^{-1})} \\ &= \tfrac{20}{3}\,\frac{z^{-1} - 3}{z^{-2} + z^{-1} - 20} = \tfrac{20}{3}\,\frac{z^{-1} - 3}{(z^{-1} - 4)(z^{-1} + 5)} \end{aligned}$$

2. I poli sono: $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = -\frac{1}{5}$, che hanno modulo minore di 1, perciò il sistema è BIBO stabile.

3. Per calcolare la risposta impulsiva si deve scompore H(z) in fratti semplici. Sostituendo $x = z^{-1}$ si ha
$$H(x) = \tfrac{20}{3}\,\tfrac{x-3}{(x-4)(x-5)} = \tfrac{A}{x-4} + \tfrac{B}{x+5}$$
con
$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \to 4}(x-4)\tfrac{20}{3}\,\frac{x-3}{(x-4)(x+5)} = \tfrac{20}{27} \\ B &= \lim_{x \to -5}(x+5)\tfrac{20}{3}\,\frac{x-3}{(x-4)(x+5)} = \tfrac{160}{27} \end{aligned}$$
per cui
$$\begin{aligned} H(z) &= \tfrac{20}{27} \cdot \frac{1}{z^{-1} - 4} + \tfrac{160}{27} \cdot \frac{1}{z^{-1} + 5} \\ &= -\tfrac{5}{27} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \tfrac{32}{27} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{5}z^{-1}} \end{aligned}$$
che restituisce
$$h(n) = -\tfrac{5}{27} \cdot (\tfrac{1}{4})^n\, u(n) + \tfrac{32}{27} \cdot (-\tfrac{1}{5})^n\, u(n)$$
con $u(n) = 1_0(n)$ gradino unitario discreto.

4. I modi del sistema sono $(\frac{1}{4})^n u(n)$ e $(-\frac{1}{5})^n u(n)$.

Esercizio 4 [punti 3]

Dato il sistema a tempo discreto

$$y(n) = \begin{cases} \sin(n+1)x(n) + 1 & x(n) \geq 0 \\ x(n-1) & x(n) < 0 \end{cases}$$

dire se è 1) causale, 2) lineare, 3) tempo-invariante, 4) BIBO stabile.

Soluzione.

1. Il sistema è causale, poichè, per determinare $y(n)$, è sufficiente conoscere $x(n)$ e $x(n-1)$.

2. Il sistema non è lineare, a causa della condizione su $x(n)$. Ad esempio, $x_1(n) = 1$ restituisce $y_1(n) = 1 + \sin(n+1)$, $x_2(n) = -1$ restituisce $y_2(n) = -1$, mentre $x(n) = x_1(n) + x_2(n) = 0$ restituisce $y(n) = 1$ che è diverso da $y_1(n) + y_2(n) = \sin(n+1)$.

3. Il sistema non è tempo-invariante, a causa della moltiplicazione per $\sin(n+1)$. Per dimostrarlo paragoniamo l'uscita traslata

$$y(n-n_0) = \begin{cases} \sin(n-n_0+1)x(n-n_0) + 1 & x(n-n_0) \geq 0 \\ x(n-n_0-1) & x(n-n_0) < 0 \end{cases}$$

   con l'uscita applicata a x traslato, ovvero

$$\Sigma[x(n-n_0)] = \begin{cases} \sin(n+1)x(n-n_0) + 1 & x(n-n_0) \geq 0 \\ x(n-n_0-1) & x(n-n_0) < 0 \end{cases}$$

4. Il sistema è evidentemente BIBO stabile, infatti per $|x(n)| < L_x$ si ha

$$|y(n)| \leq \max\Big(|\sin(n+1)x(n) + 1|, |x(n-1)|\Big) < 1 + L_x$$

Esercizio 5 [punti 3]

Il segnale $x(t) = 2\,\mathrm{sinc}^2(2t)$ viene filtrato da un filtro passa-basso con funzione di trasferimento

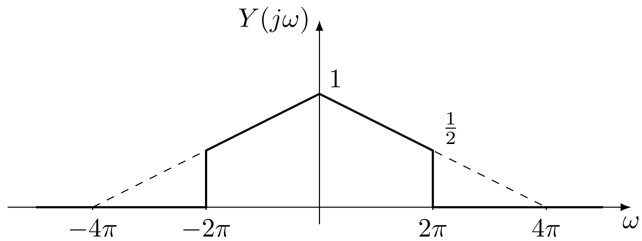
$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| < 2\pi \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

Si identifichi l'uscita $y(t)$ del filtro.

Soluzione. Abbiamo

$$X(j\omega) = 2 \cdot \tfrac{1}{2}\,\mathrm{triang}(\tfrac{\omega}{4\pi}) = \mathrm{triang}(\tfrac{\omega}{4\pi})$$

e pertanto, $Y(j\omega)$ può essere facilmente identificata per via grafica



che analiticamente restituisce

$$Y(j\omega) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{4\pi}) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{triang}(\tfrac{\omega}{2\pi})$$

e pertanto

$$y(t) = \mathrm{sinc}(2t) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sinc}^2(t)$$

Esercizio 6 [punti 3]

In MatLab si vuole calcolare la convoluzione tra il segnale $x(t) = \mathrm{sinc}(t)$ e se stesso, $y(t) = x * x(t)$. Quali dei seguenti codici è corretto?

1. $T = 1;$
   $tx = -100 : T : 100;$
   $x = \mathrm{sinc}(t);$
   $ty = 2 * tx(1) : T : 2 * tx(end);$
   $y = T * \mathrm{conv}(x, x);$

2. $T = 0.01;$
   $tx = 0 : T : 10;$
   $x = \mathrm{sinc}(t);$
   $ty = 0 : T : 2 * tx(end);$
   $y = \mathrm{conv}(x, x);$

3. $T = 0.02;$
   $tx = -50 : T : 50;$
   $x = \mathrm{sinc}(t);$
   $ty = 2 * tx(1) : T : 2 * tx(end);$
   $y = T * \mathrm{conv}(x, x);$

4. $T = 0.1;$
   $tx = -1 : T : 1;$
   $x = \mathrm{sinc}(t);$
   $ty = tx(1) : T : tx(end);$
   $y = T * \mathrm{conv}(x, x);$

Motivare la risposta.

Soluzione.

La risposta corretta è la 3 in quanto si sceglie un passo di campionamento abbastanza piccolo, $T = 0.02$, un range abbastanza grande, $[-50, 50]$, l'estensione della convoluzione è definita corrrettamente come $ty = 2*tx(1) : T : 2*tx(end);$ e la convoluzione contiene la moltiplicazione per T.