ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 30.06.2025 (Terzo appello a.a. 2024-2025)

TEMA 1 Svolgimento

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{-1+|x-1|}{x^2}\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Lo studio della convessitá non é richiesto.

Svolgimento: (a) : Il dominio é dato dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} -1+|x-1|>0 \\ \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Per le proprietá del valore assoluto si vede facilmente che il dominio é dato da D=$\{x>2\}\bigcup\{x<0\}$

Il segno é determinato dall'argomento del logaritmo e quindi $f(x)>0$ per $\frac{-1+|x-1|}{x^2}>1$. Conviene studiare la disequazione nel caso $x>2$ e $x<0$. Nel primo caso otteniamo che la funzione é positiva se $x^2-x+2<0$ mai verificata, e quindi per $x>2$ la funzione é sempre negativa. In $x<0$ otteniamo che la funzione é positiva se $x^2+x<0$ e quindi in $x\in(-1,0)$ la funzione é positiva. Nel punto $x_1=-1$ la funzione si annulla.

La funzione é continua nel suo dominio perché composta da funzioni continue. Non ci sono simmetrie evidenti.

(b) Vediamo i limiti notevoli. Poiché per $x\to\infty$ l'ordine di infinito del numeratore é minore di quello del denominatore otteniamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$$

Per le proprietá del logaritmo, vedere che $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ e quindi non ci sono asintoti obliqui.
Si vede facilmente che valgono i seguenti

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\log\left(\frac{-1+1-x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^-}\log\left(-\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Quindi $x=0$ é asintoto verticale sinistro, mentre $x=2$ é asintoto verticale destro. La funzione non é quindi limitata ne inferiormente ne superiormente.

(c) La funzione é derivabile nel suo dominio. Per $x \in D$ otteniamo:

$$f'(x) = \frac{x^2}{-1+|x-1|} \frac{x^2(\text{segno}(x-1)) - 2x(-1+|x-1|)}{x^4}$$

$$= \frac{x^2(\text{segno}(x-1)) + 2x - 2x|x-1|}{(-1+|x-1|)x^2}$$

Notiamo che il denominatore é sempre positivo. Per lo studio del segno del numeratore conviene di nuovo separare i casi $x > 2$ e $x < 0$. Nel caso $x > 2$ il numeratore é positivo se $x^2 + 2x - 2x(x-1) > 0$. Si vede facilmente che ció avviene se $x \in (2, 4)$. Otteniamo quindi che $x_2 = 4$ é punto di massimo relativo stretto. Nel caso $x < 0$ il numeratore diventa $-x^2 + 2x - 2x(1-x) > 0$ da cui é immediato vedere che questo v́ero per ogni $x < 0$, in questo intervallo la funzione é perció strettamente monotona crescente.

La funzione non é limitata ne inferiormente ne superiormente.

(d) Il grafico della funzione segue:

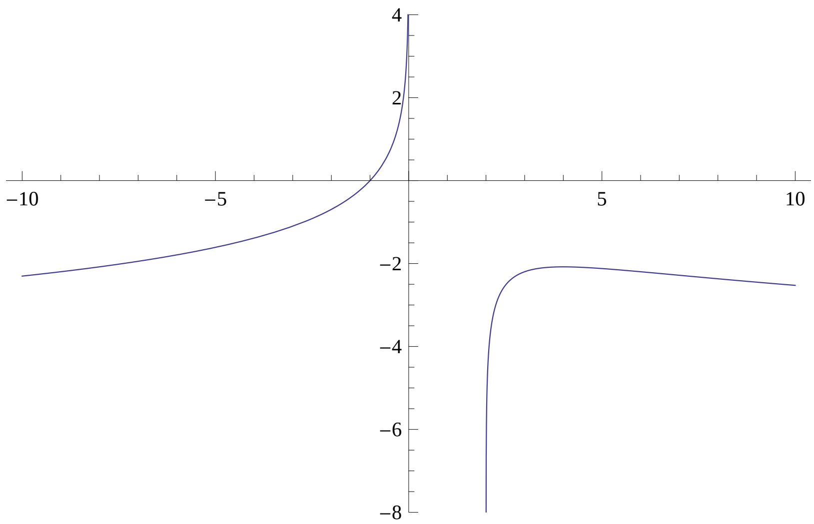

Figure 1: abbozzo del grafico della funzione dell'esercizio 1.

Esercizio 2 (punti 8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia definita $f_a(x) = \frac{x \sin^a(x-2)}{\sqrt{x^2-4}}$.

2a Calcolare $\int_2^3 f_0(x)dx$

Svolgimento: Poniamo $t = \sqrt{x^2-4}$ da cui otteniamo $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx = dt$ perció:

$$\int_2^3 f_0(x)dx = \int_0^{\sqrt{5}} dt = \sqrt{5}$$

2b Studiare la convergenza di $\int_2^3 f_\alpha(x)dx$ al variare di $a \in \mathbb{R}$

Svolgimento: Il punto pericoloso che annulla denominatore é il punto 2. Vediamo andamento asintotico dell'integrando per $x \to 2^+$ (usiamo $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$)

$$f_a(x) \sim \frac{2(x-2)^a}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}-a}}$$

Quindi l'integrale converge se e solo se $\frac{1}{2} - a < 1$ cioé $a > -\frac{1}{2}$.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza di

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k! \left(\frac{2}{k}\right)^k \log k$$

Svolgimento: Essendo una serie a termini positivi possiamo applicare il criteri del rapporto. Abbiamo:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!\left(\frac{2}{k+1}\right)^{k+1}\log(k+1)}{k!\left(\frac{2}{k}\right)^k \log k} = (k+1)\frac{2}{k+1}\left(\frac{2}{k+1}\frac{k}{2}\right)^k \frac{\log(k+1)}{\log k}$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^k \frac{\log k + \log\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\log k} \to \frac{2}{\mathrm{e}} \quad \text{per } k \to \infty$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il limite notevole $\lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^k = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Poiché $\frac{2}{\mathrm{e}} < 1$ la serie converge.

Esercizio 4 (punti 8) (programma a.a. 24/25) Si consideri l'equazione differenziale ordinaria

$$y''(t) - y(t) = t \qquad \text{dove } t \in \mathbb{R}$$

i) Determinare l'integrale generale.

Svolgimento: Per trovare soluzione generale dell'omogenea troviamo le soluzioni dell'equazione $z^2 - 1 = 0$. Otteniamo $z_{1\backslash 2} = \pm 1$ e quindi $y_o(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{-t}$. É facile vedere che $y(t) = -t$ é soluzione particolare della non omogenea. Quindi l'integrale generale é:

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{-t} - t$$

ii) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$.

Svolgimento: Imponendo le condizioni iniziali otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 - c_2 - 1 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo otteniamo $c_1 = 2$ e $c_2 = 0$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy é:

$$y(t) = 2\mathrm{e}^t - t$$

Esercizio 4 (punti 8) (programma dell' A.A. $\leq 23/24$) Sia

$$A = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \frac{|z + \mathrm{Re}(z)|^2}{|z|^2 + (\mathrm{Im}(z))^2} \geq 2$$

Determinare A e disegnarlo sul piano di Gauss.

Svolgimento: Usiamo la notazione algebrica ponendo $z = x + iy$. Otteniamo quindi la seguente disequazione in $\mathbb{R}^2 \backslash \{0, 0\}$

$$\frac{(2x)^2 + y^2}{x^2 + y^2 + y^2} \geq 2$$

Semplificando otteniamo $2x^2 \geq 3y^2$ quindi $\sqrt{2}|x| \geq \sqrt{3}|y|$ per le prorietá di simmetria del valore assoluto si vede facilmente che sul piano di Gauss le soluzioni sono quelle evidenziate in verde nel grafico sotto riportato

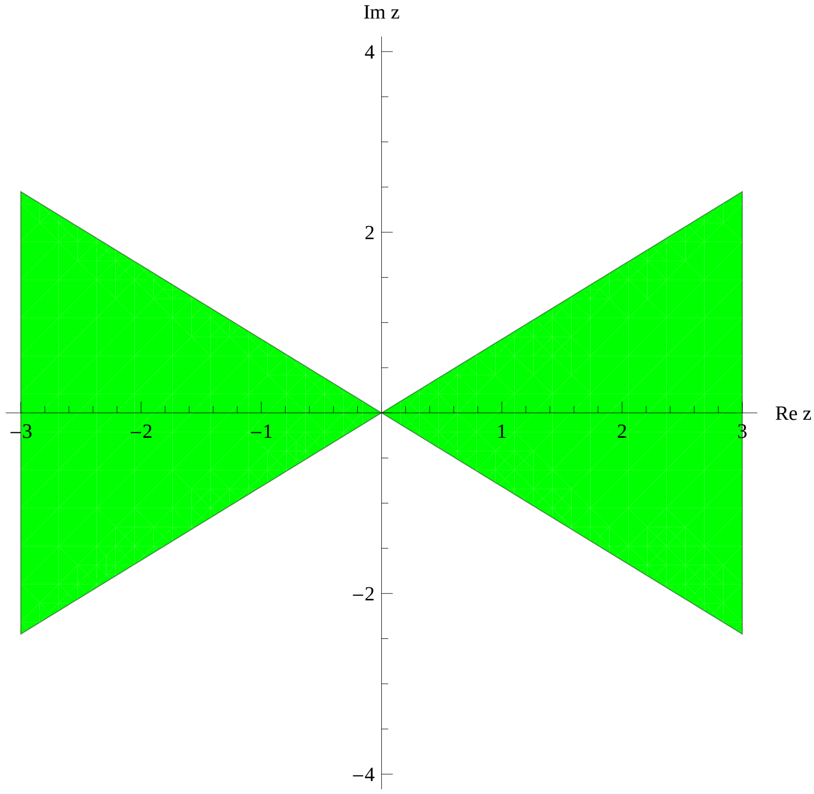

Figure 2: Soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'esercizio 1.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 30.06.2025 (Terzo appello a.a. 2024-2025)

TEMA 2 Svolgimento

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{-2 + |x-2|}{x^2}\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Lo studio della convessitá non é richiesto.

Svolgimento: (a) : Il dominio é dato dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} -2 + |x-2| > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Per le proprietá del valore assoluto si vede facilmente che il dominio é dato da D=$\{x > 4\} \bigcup \{x < 0\}$

Il segno é determinato dall'argomento del logaritmo e quindi $f(x) > 0$ per $\frac{-2+|x-2|}{x^2} > 1$. Conviene studiare la disequazione nel caso $x > 4$ e $x < 0$. Nel primo caso otteniamo che la funzione é positiva se $x^2 - x + 4 < 0$ mai verificata, e quindi per $x > 4$ la funzione é sempre negativa. In $x < 0$ otteniamo che la funzione é positiva se $x^2 + x < 0$ e quindi in $x \in (-1, 0)$ la funzione é positiva. Nel punto $x_1 = -1$ la funzione si annulla.

La funzione é continua nel suo dominio perché composta da funzioni continue. Non ci sono simmetrie evidenti.

(b) Vediamo i limiti notevoli. Poiché per $x \to \infty$ l'ordine di infinito del numeratore é minore di quello del denominatore otteniamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$$

Per le proprietá del logaritmo, vedere che $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ e quindi non ci sono asintoti obliqui.
Si vede facilmente che valgono i seguenti

$$\lim_{x\to4^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \log\left(\frac{-2+2-x}{x^2}\right) = \lim_{x\to0^-} \log\left(-\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Quindi $x = 0$ é asintoto verticale sinistro, mentre $x = 4$ é asintoto verticale destro. La funzione non é quindi limitata ne inferiormente ne superiormente.

(c) La funzione é derivabile nel suo dominio. Per $x \in D$ otteniamo:

$$f'(x) = \frac{x^2}{-2+|x-2|} \frac{x^2(\text{segno}(x-2)) - 2x(-2+|x-2|)}{x^4}$$

$$= \frac{x^2(\text{segno}(x-2)) + 4x - 2x|x-2|}{(-2+|x-2|)x^2}$$

Notiamo che il denominatore é sempre positivo. Per lo studio del segno del numeratore conviene di nuovo separare i casi $x > 4$ e $x < 0$. Nel caso $x > 4$ il numeratore é positivo se $x^2 + 4x - 2x(x-2) > 0$. Si vede facilmente checió avviene se $x \in (4, 8)$. Otteniamo quindi che $x_2 = 8$ é punto di massimo relativo stretto. Nel caso $x < 0$ il numeratore diventa $-x^2+4x-2x(2-x) > 0$ da cui é immediato vedere che questo \'vero per ogni $x < 0$, in questo intervallo la funzione é perció strettamente monotona crescente.

La funzione non é limitata ne inferiormente ne superiormente.

(d) Il grafico della funzione segue:

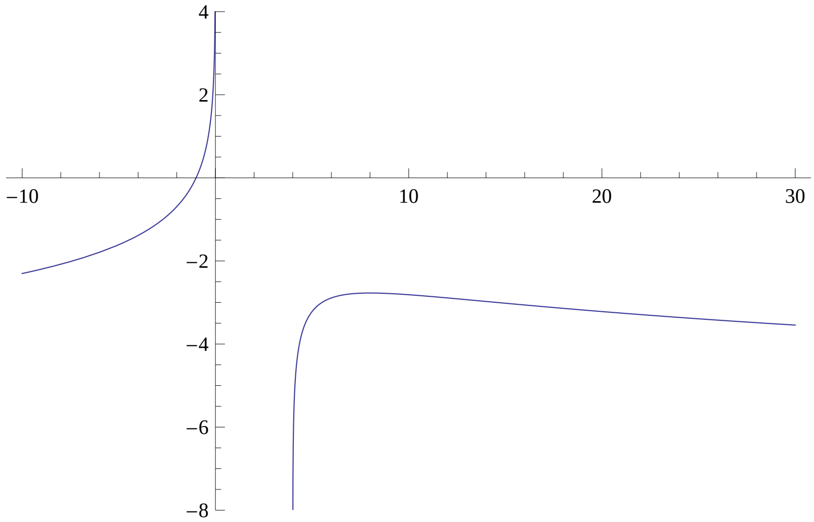

Figure 3: abbozzo del grafico della funzione dell'esercizio 2.

Esercizio 2 (punti 8) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia definita $f_a(x) = \frac{x \sin^a(x-5)}{\sqrt{x^2-25}}$.

2a Calcolare $\int_5^6 f_0(x)dx$

Svolgimento: Poniamo $t = \sqrt{x^2 - 25}$ da cui otteniamo $\frac{x}{\sqrt{x^2-25}}dx = dt$ perció:

$$\int_5^6 f_0(x)dx = \int_0^{\sqrt{11}} dt = \sqrt{11}$$

2b Studiare la convergenza di $\int_5^6 f_\alpha(x)dx$ al variare di $a \in \mathbb{R}$

Il punto pericoloso che annulla denominatore é il punto 5. Vediamo andamento asintotico dell'integrando per $x \to 5^+$ (usiamo $x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$)

$$f_a(x) \sim \frac{5(x-5)^a}{\sqrt{10}(x-5)^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{\sqrt{10}(x-2)^{\frac{1}{2}-a}}$$

Quindi l'integrale converge se e solo se $\frac{1}{2} - a < 1$ cioé $a > -\frac{1}{2}$.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza di

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k! \left(\frac{\sqrt{2}}{k}\right)^k \log^2 k$$

Svolgimento: Essendo una serie a termini positivi possiamo applicare il criteri del rapporto. Abbiamo:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!\left(\frac{\sqrt{2}}{k+1}\right)^{k+1}\log^2(k+1)}{k!\left(\frac{\sqrt{2}}{k}\right)^k \log^2 k} = (k+1)\frac{\sqrt{2}}{k+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{k+1}\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^k \frac{\log^2(k+1)}{\log^2 k}$$

$$= \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^k \left(\frac{\log k + \log\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\log k}\right)^2 \to \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}} \quad \text{per } k \to \infty$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il limite notevole $\lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^k = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Poiché $\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}} < 1$ la serie converge.

Esercizio 4 (punti 8) (programma a.a. 24/25) Si consideri l'equazione differenziale ordinaria

$$y''(t) - 2y(t) = t \qquad \text{dove } t \in \mathbb{R}$$

i) Determinare l'integrale generale.
Svolgimento: Per trovare soluzione generale dell'omogenea troviamo le soluzioni dell'equazione $z^2 - 2 = 0$. Otteniamo $z_{1\backslash 2} = \pm\sqrt{2}$ e quindi $y_o(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$. É facile vedere che $y(t) = -\frac{t}{2}$ é soluzione particolare della non omogenea. Quindi l'integrale generale é:

$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} - \frac{t}{2}$$

ii) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$.
Svolgimento: Imponendo le condizioni iniziali otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_2 - \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

Risolvendo otteniamo $c_1 = 1 + \frac{3}{4\sqrt{2}}$ e $c_2 = 1 - \frac{3}{4\sqrt{2}}$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy é:

$$y(t) = \left(1 + \frac{3}{4\sqrt{2}}\right) e^{\sqrt{2}t} + \left(1 - \frac{3}{4\sqrt{2}}\right) e^{-\sqrt{2}t} - \frac{t}{2}$$

Esercizio 4 (punti 8) (programma dell' A.A. $\leq 23/24$) Sia

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ :\ \frac{|z + \mathrm{Re}(z)|^2}{|z|^2 + (\mathrm{Im}(z))^2} \geq 3$$

Determinare A e disegnarlo sul piano di Gauss.

Svolgimento: Usiamo la notazione algebrica ponendo $z = x + iy$. Otteniamo quindi la seguente disequazione in $\mathbb{R}^2 \backslash \{0, 0\}$

$$\frac{(2x)^2 + y^2}{x^2 + y^2 + y^2} \geq 3$$

Semplificando otteniamo $x^2 \geq 5y^2$ quindi $|x| \geq \sqrt{5}|y|$ per le prorietá di simmetria del valore assoluto si vede facilmente che sul piano di Gauss le soluzioni sono quelle evidenziate in verde nel grafico sotto riportato

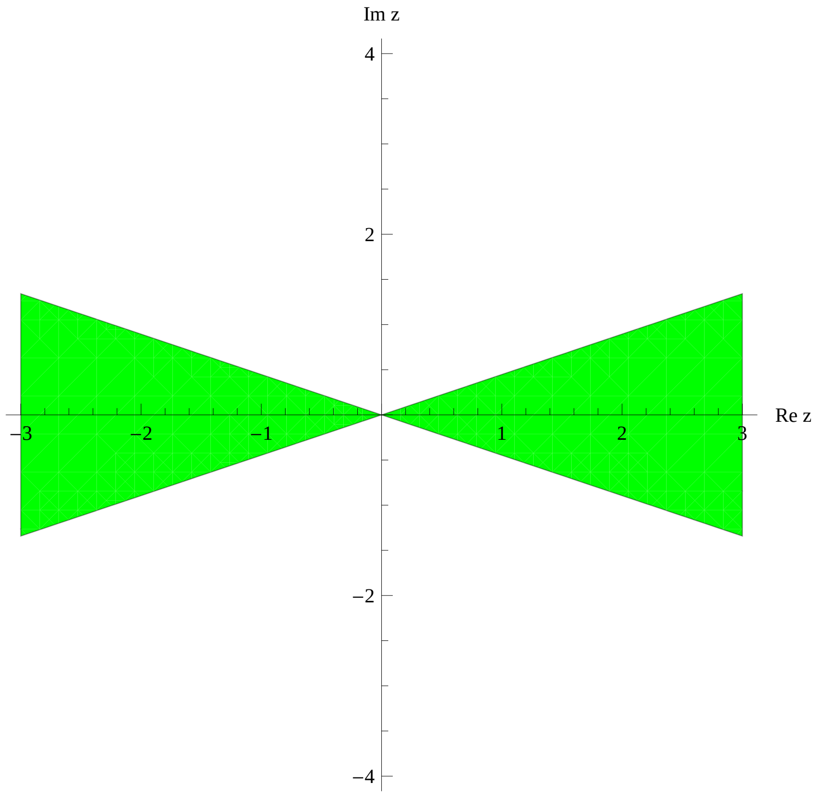

Figure 4: Soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'esercizio 2.