ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2024-2025

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

30 giugno 2025

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = (1 + 2x)e^{-x^2}$$

(a) Determinare il dominio, il segno, eventuali simmetrie o periodicità ;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f,

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f,

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite della successione

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right).$$

Esercizio 3 (8 punti)
1)Calcolare le primitive

$$\int xe^{-3x}dx.$$

2) Calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} xe^{-3x}dx.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Sia

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2) - 2x^2 - 2y^2.$$

Determinare il dominio di f, calcolare i punti critici e studiarne la natura.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende <u>esclusi</u> i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

Soluzioni

Soluzione esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = (1 + 2x)e^{-x^2}$$

(a) La funzione è ben definita su tutto $\mathbb{R}$, quindi il dominio è $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Infine, dato che $e^{-x^2} > 0$ per ogni x, si ha che $f(x) \geq 0$ se e solo se $1 + 2x \geq 0$, quindi se e solo se $x \geq -\frac{1}{2}$. La funzione non presenta simmetrie né periodicità.

(b) Dato che la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ si devono calcolare solo i limiti $x \to \pm\infty$. Per il confronto tra infiniti si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} (1 + 2x)e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + 2x}{e^{x^2}} = 0$$

e analogamente

$$\lim_{x\to-\infty} (1 + 2x)e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + 2x}{e^{x^2}} = 0.$$

La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale sia $+\infty$ che a $-\infty$.

(c) La funzione è continua in tutto il suo dominio in quanto composizione e somma di funzioni continue. Calcoliamo la derivata di f:

$$f'(x) = 2e^{-x^2} + (1+2x)(-2x)e^{-x^2} = [2+(1+2x)(-2x)]e^{-x^2} = [2-2x-4x^2]e^{-x^2} = 2(1-x-2x^2)e^{-x^2}.$$

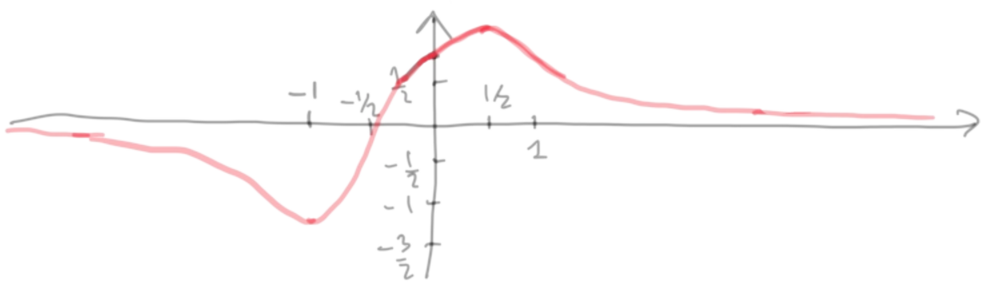
La funzione è derivabile su tutto il suo dominio.

Per determinare gli intervalli di monotonia di f, studiamo il segno della funzione f'. Dato che $e^{-x^2} > 0$ per ogni x, si ha che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $1 - x - 2x^2 \geq 0$, cioé se e solo se $2x^2 + x - 1 \leq 0$, che è verificata se e solo se $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

In conclusione la funzione è monotona crescente nell'intervallo $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e monotona decrescente negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Questo implica che $x = -1$ è un punto di minimo locale, e $x = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo locale.

Dato che la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed a $\pm\infty$ tende a 0, osservando che $f(-1) = -3e^{-1} < 0$ e $f(1/2) = 2e^{-1/4} > 0$, possiamo concludere che $x = -1$ è un punto di minimo globale o assoluto, e $x = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo globale o assoluto. Il massimo della funzione è $2e^{-1/4}$ e il minimo della funzione è $-3e^{-1}$.

(d)



Soluzione esercizio 2 Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite della successione

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right).$$

Dato che $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, possiamo utilizzare il polinomio di Taylor per la funzione $\log(1+x)$ per $x \to 0$. Abbiamo che

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

e quindi

$$n^\alpha\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) = n^\alpha\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n}\right) = n^\alpha\frac{1}{n^2}\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)$$
$$= n^{\alpha-2}\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right).$$

Il limite quindi è

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-2}\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \alpha = 2 \\ -\infty & \alpha > 2 \\ 0 & \alpha < 2. \end{cases}$$

Soluzione esercizio 3

1)Calcolare le primitive

$$\int xe^{-3x}dx.$$

Procediamo per parti:

$$\int xe^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}x - \int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}x + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}x - \frac{1}{9}e^{-3x} + c.$$

2) Calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} xe^{-3x}dx.$$

Per definizione di integrale generalizzato e ricordando il corollario del teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo che

$$\int_0^{+\infty} xe^{-3x}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M xe^{-3x}dx = \lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}x - \frac{1}{9}e^{-3x}\right]_0^M$$
$$= \lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{3}e^{-3M}M - \frac{1}{9}e^{-3M} + 0 + \frac{1}{9}e^0 = \frac{1}{9}$$

dove nel limite abbiamo utilizzato il fatto che $\lim_{M\to+\infty} e^{-3M} = 0$ e $\lim_{M\to+\infty} e^{-3M}M = \lim_{M\to+\infty}\frac{M}{e^{3M}} = 0$ per confronto tra infiniti.

Soluzione esercizio 4

Sia

$$f(x,y) = \sin(x^2+y^2) - 2x^2 - 2y^2.$$

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Per determinare i punti critici risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \partial_x\left(\sin(x^2+y^2) - 2x^2 - 2y^2\right) = 0 \\ \partial_y\left(\sin(x^2+y^2) - 2x^2 - 2y^2\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x\cos(x^2+y^2) - 4x = 0 \\ 2y\cos(x^2+y^2) - 4y = 0 \end{cases}$$

che diventa

$$\begin{cases} 2x\left(\cos(x^2+y^2)-2\right)=0 \\ 2y\left(\cos(x^2+y^2)-2\right)=0. \end{cases}$$

Dato che $-1 \leq \cos(x^2+y^2) \leq 1$, $\cos(x^2+y^2)-2 \neq 0$ per ogni x, y. Dunque l'unica soluzione del sistema è $x=0, y=0$.

L'unico punto critico della funzione è $(0,0)$. Per determinarne la natura calcoliamo l'hessiana della funzione in $(0,0)$. Abbiamo che

$$\begin{array}{rcl} \partial^2_{xx} f(x,y) & = & \partial_x(2x\left(\cos(x^2+y^2)-2\right)) = 2(\cos(x^2+y^2)-2) - 4x^2\sin(x^2+y^2) \\ \partial^2_{yy} f(x,y) & = & \partial_y(2y\left(\cos(x^2+y^2)-2\right)) = 2(\cos(x^2+y^2)-2) - 4y^2\sin(x^2+y^2) \\ \partial^2_{xy} f(x,y) & = & \partial_y(2x\left(\cos(x^2+y^2)-2\right)) = -4xy\sin(x^2+y^2). \end{array}$$

Dunque l'hessiana diventa

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che è una matrice definita negativa, dato che ha autovalore -2 (con molteplicità 2).

Il punto $(0,0)$ è dunque un punto di massimo locale per la funzione.