Segnali e Sistemi

Tempo 2 ore e 30 minuti **Nessun documento ammesso**

Istruzioni. Il compito va eseguito sui fogli a quadretti forniti. Scrivere Cognome Nome e Matricola su ogni foglio da consegnare. Per ogni domanda, motivare la risposta e riportare tutti i calcoli ritenuti necessari. Quando si richiede di tracciare un segnale, bisogna individuarne il supporto e tracciarne in modo anche approssimativo l'andamento. Consegnare unicamente il compito, senza "brutta copia".

Per superare l'esame bisogna ottenere almeno 10 punti negli esercizi ed almeno 5 tra teoria e Matlab.

Esercizio 1: Segnali a tempo continuo, 7 punti

Si consideri il segnale $x(t)$, identicamente nullo al di fuori dell'intervallo $t \in (-1, 1)$, ed illustrato in Fig. 1.

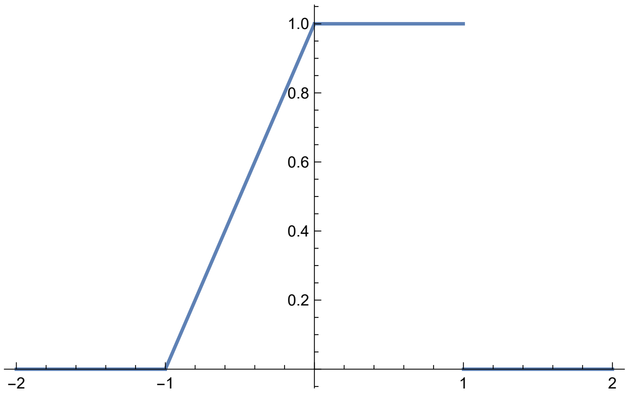

Figura 1: Andamento di $x(t)$

1. Calcolare su $\mathbb{R}$ energia, potenza e norma $\mathcal{L}^1$ di $x(t)$. Dire se tale segnale appartiene agli spazi $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.
2. Calcolare $y(t) = x'(t)$ (derivata generalizzata di $x(t)$), tracciarne l'andamento e calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, dt$.
3. Calcolare la trasformata di Fourier a tempo continuo del segnale $y(t)$.
4. Osserviamo ora che $x(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\, d\tau = [u * y](t)$ dove u è il gradino unitario. Utilizzare tale relazione per calcolare la TFtc di x. Suggerimento: ricordare che $\mathcal{F}[u](\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$.

Soluzione dell'esercizio 1

1. Osserviamo che $\forall t \in (-1, 0)\,,\; x(t) = t+1$, $\forall t \in (0, 1)\,,\; x(t) = 1$, e che $x(t)$ è nullo altrove. Applicando le definizioni e scomponendo l'integrale sugli intervalli suddetti si ha:

$$
\begin{aligned}
E[x] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-1}^{0} (t+1)^2\, dt + \int_0^1 dt = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \\
P[x] &= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2\, dt = 0 \\
\|x\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt = \int_{-1}^{0} (t+1)\, dt + \int_0^1 dt = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

La potenza di x è nulla in quanto il segnale ha energia finita e quindi appartiene a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. La sua norma $\mathcal{L}^1$ è finita, quindi appartiene anche a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Infine è un segnale limitato e quindi appartiene anche a $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$

2. Il segnale è continuo a tratti con un unica discontinuità di salto in $t = 1$. La sua derivata è evidentemente nulla per $t < -1$, per $t \in (0, 1)$ e per $t > 1$, mentre vale 1 per $t \in (-1, 0)$ In $t = -1$ e $t = 0$ la derivata

non è definita, essendo il limite destro del rapporto incrementale di x diverso dal limite sinitro. Infine, il salto comporta la presenza di una delta di Dirac nella derivata generalizzata. L'ampiezza della delta è uguale all'ampiezza del salto (-1). In conclusione, possiamo scrivere:

$$y(t) = \mathrm{rect}\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta(t-1)$$

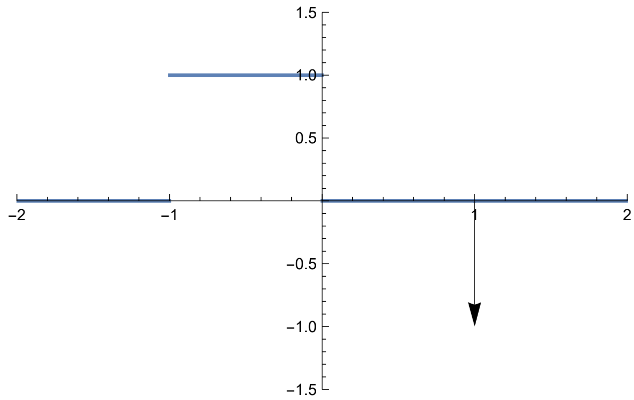

Figura 2: Andamento di $y(t) = x'(t)$

L'andamento di $y(t)$ è mostrato in Fig. 2. L'integrale di y su $\mathbb{R}$ è dato dall'area dell'impulso rettangolare meno l'area della delta di Dirac: il risultato è zero. Formalmente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathrm{rect}\left(t+\frac{1}{2}\right) - \delta(t-1)\right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(t+\frac{1}{2}\right) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-1)\,dt = 1{-}1{=}0$$

Oppure, si può osservare che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt = \lim_{T\to+\infty} \int_{-\infty}^{T} y(t)\,dt = \lim_{T\to+\infty} x(T) = 0$$

3. Si ha quanto segue:

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{rect}(t), t\to\omega\right] = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \qquad \mathcal{F}\left[\mathrm{rect}\left(t+\frac{1}{2}\right), t\to\omega\right] = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) e^{j\frac{\omega}{2}}$$

$$\mathcal{F}\left[\delta(t), t\to\omega\right] = 1 \qquad \mathcal{F}\left[\delta(t-1), t\to\omega\right] = e^{-j\omega}$$

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\left[\mathrm{rect}\left(t+\frac{1}{2}\right) - \delta(t-1), t\to\omega\right] = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\omega}$$

4. Basta ricordare che la convoluzione nel tempo corrisponde al prodotto in frequenza. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} X(\omega) = \mathcal{F}\left[u * y, t\to\omega\right] &= \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) Y(\omega) = \pi Y(\omega)\delta(\omega) + \frac{Y(\omega)}{j\omega} \\ &= \pi Y(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} Y(\omega), \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la proprietà del prodotto segnale-impulso (Y è un segnale continuo). Ora, $Y(\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt = 0$. Oppure, per calcolo diretto, $Y(\omega)|_{\omega=0} = \mathrm{sinc}(0)e^0 - e^0 = 1{-}1{=}0$.

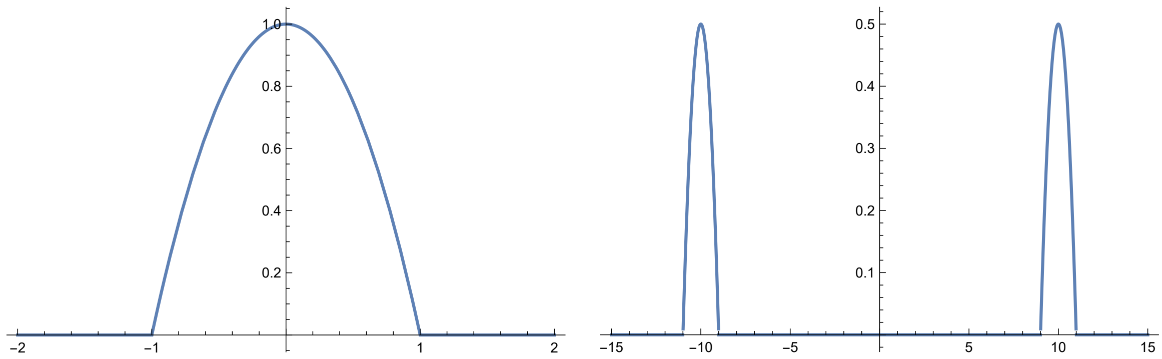

Figura 3: Andamento di $X(\omega)$ (sinistra) e $Y(\omega)$ (destra) nel caso $B = 1$ e $\omega_0 = 10$.

Quindi

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega}Y(\omega) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\frac{e^{j\frac{\omega}{2}}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega}}{j\omega}$$

Esercizio 2: Campionamento, 7 punti

Sia $x(t)$ un segnale la cui trasformata di Fourier a tempo continuo è $X(\omega) = \operatorname{rect}(\frac{\omega}{2B})\left(1 - \frac{\omega^2}{B^2}\right)$, con $B > 0$.

1. Tracciare l'andamento di $X(\omega)$
2. Si può ricostruire x dai suoi campioni presi a passo T_c, qualunque sia T_c? Argomentare la risposta.
3. Sia $y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t)$, con $\omega_0 \gg 2B$. Calcolare $Y(\omega)$ in termini di $X(\omega)$ e tracciarne l'andamento. Qual è (se esiste) la minima frequenza di campionamento che permette di ricostruire y dai suoi campioni?
4. Sia $z(t) = y(t) + r(t)$, dove r è un segnale "di disturbo" di cui si conosce solo una proprietà della TFtc: $\forall|\omega| > W_R, R(\omega) = 0$, dove $W_R > 0$. Proporre allora un sistema o una serie di sistemi (non necessariamente tutti LTI) tali che quando i campioni di z presi con opportuno passo di campionamento T_c sono messi in ingresso, si ritrovi in uscita il segnale x. Discutere le condizioni che i parametri T_c, B, ω_0 e W_R devono eventualmente soddisfare.

Soluzione dell'esercizio 2

1. L'andamento di X è illustrato in Fig. 3 (sinistra) per il caso $B = 1$.
2. Dalla definizione di X si evince che si tratta di un segnale a banda limitata. Quindi, per il teorema di Shannon il segnale può essere ricostruito dai suoi campioni purché la frequenza di campionamento soddisfi il criterio di Nyquist: $f_c \geq 2f_{\max}$, dove $f_{\max}$ è la massima frequenza contenuta nel segnale. In questo caso, $f_{\max} = \frac{B}{2\pi}$ e quindi $f_c \geq \frac{B}{\pi}$ cioè $T_c = \frac{1}{f_c} \leq \frac{\pi}{B}$. È possibile ricostruire x dai suoi campioni se e soltanto se tale condizione è soddisfatta.
3. Applicando la proprietà di modulazione si ottiene immediatamente:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}\left[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)\right]$$

   L'andamento di Y è illustrato in Fig. 3 (destra) nel caso $B = 1$ e $\omega_0 = 10$. Si noti che la condizione $\omega_0 \gg B$ garantisce che le due versioni traslate in frequenza di X non abbiano supporto in comune.

   La massima frequenza contenuta in y è $f_{\max} = \frac{B+\omega_0}{2\pi} \approx \frac{\omega_0}{2\pi}$. Quindi anche y può essere riscostruito dai suoi campioni, purché la frequenza di campionamento sia almeno pari a $\frac{B+\omega_0}{\pi} \approx \frac{\omega_0}{\pi}$.
4. Per prima cosa bisogna ricostruire $z(t)$ dai suoi campioni presi con periodo T_c. Osserviamo che, se $W_R < \omega_0 + B$, la banda di z è la stessa di y, e quindi z può essere ricostruito dai suoi campioni con la

stessa condizione $T_c \leq \frac{\pi}{B+\omega_0}$. Se questa condizione è vera, per ricostruire $z(t)$ dai suoi campioni basta utilizzare la formula d'interpolazione ideale: $z(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(nT_c)\text{sinc}\left(\frac{t-nT_c}{T_c}\right)$.
Poi, siccome r è sconosciuto, dobbiamo eliminarlo se vogliamo ottenere y da z. A tale scopo dobbiamo imporre la condizione $W_R < \omega_0 - B$, che assicura che y ed r non siano sovrapposti in frequenza, e che, essendo più forte della condizione $W_R < \omega_0 + B$, implica anche quest'ultima che quindi non è più necessaria. In conclusione, possiamo eliminare r usando un filtro passa-alto con pulsazione di taglio $\omega_{\text{HP}} \in (W_R, \omega_0 - B)$:

$$y(t) = h_{\text{HP}} * z(t) \qquad\qquad H_{\text{HP}}(\omega) = 1 - \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_{\text{HP}}}\right)$$

Osserviamo infine che è facile ottenere x da y: basta applicare una nuova modulazione a pulsazione ω_0 e un filtraggio passa-basso con pulsazione di taglio $\omega_{\text{LP}} \in (B, \omega_0 - B)$, per esempio $\omega_{\text{LP}} = \frac{\omega_0}{2}$. Inoltre, il filtro passa basso deve avere una risposta in ampiezza pari a 2 in banda passante, per compensare il fattore $\frac{1}{2}$ della modulazione. Abbiamo quindi:

$$x(t) = [h_{\text{LP}} * (y \cdot \phi)](t) \qquad \text{con } H_{\text{LP}}(\omega) = 2\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_{\text{LP}}}\right), \qquad \phi(t) = \cos(\omega_0 t)$$

In conclusione, la sequenza di operazioni, illustrata anche in Fig. 4 è la seguente:

$$z(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z(nT_c)\text{sinc}\left(\frac{t-nT_c}{T_c}\right) \qquad y(t) = [h_{\text{HP}} * z](t) \qquad x(t) = [h_{\text{LP}} * (y \cdot \phi)](t)$$

Con

$$H_{\text{HP}}(\omega) = 1 - \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_{\text{HP}}}\right) \qquad \text{con } \omega_{\text{HP}} \in (W_R, \omega_0 - B)$$
$$H_{\text{LP}}(\omega) = 2\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_{\text{LP}}}\right) \qquad \text{con } \omega_{\text{LP}} \in (B, \omega_0 - B)$$
$$\phi(t) = \cos(2\pi\omega_0 t)$$

A condizione che:

$$T_c \leq \frac{B+\omega_0}{\pi} \qquad\qquad W_R < \omega_0 - B$$

oltre a $\omega_0 \gg B$, che è data come ipotesi.

Esercizio 3: Funzione di trasferimento, 7 punti

Il sistema $\mathcal{S}$ LTI a tempo continuo ha in ingresso il segnale $x(t) = e^{-4t}u(t)$ e produce in uscita il segnale $y(t) = \cos(3t)e^{-t}u(t)$. Ricordiamo la seguente trasformata di Laplace, valida per ogni $A, B, \sigma, \omega \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}\left[e^{\sigma t}u(t)\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]\right](s) = \frac{A(s-\sigma) + B\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \qquad \text{ROC} = \{s : \text{Re}(s) > \sigma\} \qquad (1)$$

1. Determinare $X(s)$ e $Y(s)$, le trasformate di Laplace di $x(t)$ e di $y(t)$.
2. Calcolare $H(s)$, la funzione di trasferimento del sistema e usare tale risultato per determinare l'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti di cui $\mathcal{S}$ è il sistema LTI causale associato.
3. Determinare se il sistema $\mathcal{S}$ è stabile.
4. Determinare la risposta impulsiva del sistema $\mathcal{S}$.

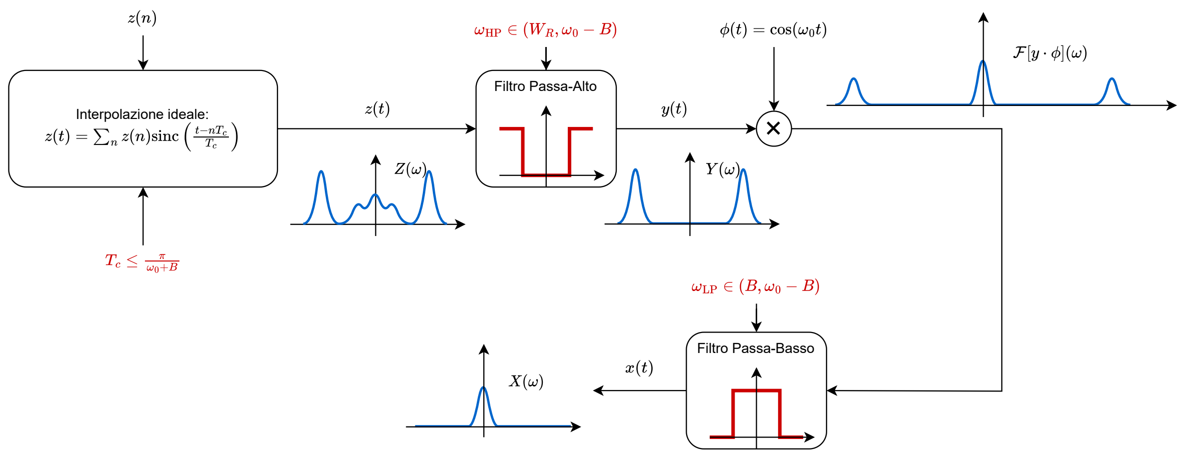

Figura 4: Schema del sistema che recupera $x(t)$ dai campioni di z.

5. Determinare l'uscita del sistema $\mathcal{S}$ quando l'ingresso è $v(t) = 2e^{-4(t-5)}u(t-5)$.
   Suggerimento. Il risultato si può ottenere molto semplicemente utilizzando le proprietà dei sistemi LTI.

Soluzione dell'esercizio 3

1. Riconosciamo che il segnale x si ottiene usando la formula (1) con $\omega = 0$, $A = 1$, $B = 0$, $\sigma = -4$. Di conseguenza, la sua TL è:
$$X(s) = \frac{1}{s+4}, \quad \text{ROC} = \{s : \text{Re}(s) > -4\}$$
   Similmente, y si ottiene dalla formula (1) usando $\sigma = -1$, $\omega = 3$, $A = 1$ e $B = 0$. Si ottiene allora:
$$Y(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+9} = \frac{s+1}{s^2+2s+10}, \quad \text{ROC} = \{s : \text{Re}(s) > -1\}$$

2. Abbiamo che $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$, quindi:
$$H(s) = \frac{(s+1)(s+4)}{s^2+2s+10} = \frac{s^2+5s+4}{s^2+2s+10}, \quad \text{ROC} = \{s : \text{Re}(s) > -1\}$$
   Da cui, l'EDOLCC cercata è:
$$y'' + 2y' + 10y = x'' + 5x' + 4x$$

3. Il grado del numeratore di $H(s)$ è uguale a quello del denominatore, per cui possiamo guardare unicamente alla parte reale delle radici del denominatore. Tali radici sono:
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-10} = -1 \pm 3j$$
   La parte reale delle 2 radici è -3, strettamente negativa: il sistema è stabile.

4. Dall'espressione di $H(s)$ trovata in precedenza si ottiene:
$$H(s) = \frac{s^2+5s+4}{s^2+2s+10} = \frac{s^2+2s+10+3s-6}{s^2+2s+10} = 1 + 3\frac{s-2}{s^2+2s+10}$$
   Per ottenere la trasformata inversa di $\frac{s-2}{s^2+2s+10}$ possiamo cercare di esprimere tale funzione usando la formula (1), oppure possiamo applicare la decomposizione in fratti semplici.

Nel primo caso, osservando che le radici del denomitatore sono $\lambda_{1,2} = -1 \pm 3j$, abbiamo $\sigma = \mathrm{Re}(\lambda_1) = -1$ e $\omega = \Im(\lambda_1) = 3$, per cui possiamo scrivere

$$\frac{s-2}{s^2+2s+10} = \frac{A(s+1)+3B}{(s+1)^2+9} = \frac{As+A+3B}{(s+1)^2+9}$$

Applichiamo il principio d'identità dei polinomi ai numeratori:

$$\begin{cases} A & = 1 \\ A+3B & = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A & = 1 \\ B & = -1 \end{cases}$$

E quindi:

$$H(s) = 1 + 3\frac{(s+1)-3}{(s+1)^2+9} \qquad h(t) = \delta(t) + 3e^{-t}u(t)\left[\cos(3t) - \sin(3t)\right]$$

5. Osserviamo che $v(t) = 2x(t-5)$ quindi l'uscita corrispondente è $2y(t-5)$:

$$h * v(t) = 2y(t-5) = 2\cos\left[3(t-5)\right] e^{-t+5}u(t-5)$$

Domanda teorica 1 : TFtd e TFD, 4 punti

1. Mostrare che utilizzando la Trasformata di Fourier Discreta e lo *zero-padding* è possibile ottenere una rappresentazione discreta della trasformata di Fourier a tempo discreto (TFtd) di un segnale $x(n)$ con risoluzione arbitrariamente fine, nelle ipotesi che il supporto di x sia $\{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Soluzione dell'esercizio

La TFtd di x è $X(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)e^{-j\omega n}$. Indichiamo con $Y_{\mathrm{TFD}}(k)$ il k-esimo valore della TFD del segnale periodico $y(n) = x(n \mod N)$, con $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. In altre parole, y è la replica periodica di x con periodo N, e, dato il supporto di x, abbiamo che $\forall n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $y(n) = x(n)$. Dalla definizione di TFD si ha:

$$\begin{aligned} &\forall k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}, \\ Y_{\mathrm{TFD}}(k) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-jkn\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jkn\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jkn\frac{2\pi}{N}} \\ &= \frac{1}{N}\left. X(\omega)\right|_{\omega=k\frac{2\pi}{N}} \end{aligned}$$

Dove abbiamo utilizzato la proprietà $\forall n < 0, n \geq N$, $x(n) = 0$. Dall'ultima identità si vede che effettivamente stiamo campionando $X(\omega)$ con passo $\frac{2\pi}{N}$. Adesso sia $z(n) = x(n \mod M)$, dove M è un intero più grande di N. Possiamo vedere z come una replica periodica di x, mentre se consideriamo un singolo periodo di z, esso può essere visto come un periodo di y a cui abbiamo aggiunto degli zeri in coda (i valori di $x(n)$ per $n \geq N$): è lo *zero-padding*. Calcoliamo ora la TFD di z:

$$\begin{aligned}
&\forall k \in \{0, 1, \dots, M-1\}, \\
Z_{\text{TFD}}(k) &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} z(n) e^{-jkn\frac{2\pi}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jkn\frac{2\pi}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-jkn\frac{2\pi}{M}} \\
&= \frac{1}{M} \left. X(\omega) \right|_{\omega = k\frac{2\pi}{M}}
\end{aligned}$$

Quindi con lo zero padding possiamo ridurre il passo di campionamento della TFtd ($\frac{2\pi}{M}$) ad un valore arbitrariamente piccolo scegliendo M sufficientemente grande.

Domanda teorica 2 : LTI in regime sinusoidale, 4 punti

1. Ricordare la definizione di risposta in frequenza di un LTI a tempo continuo stabile e la sua relazione con la risposta impulsiva.
2. Mostrare che se $\mathcal{S}$ è un LTI stabile, $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ e $y(t) = \mathcal{S}[x](t)$, allora esistono delle opportune costanti (rispetto a t), A ϕ, tali che $y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ Esprimere tali costanti in termini di $H(\omega)$ (risposta in frequenza di $\mathcal{S}$).

Soluzione dell'esercizio

1. La risposta in frequenza $H(\omega)$ di un LTI stabile $\mathcal{S}$ è definita come il rapporto tra l'uscita y e l'ingresso x del sistema quando x è l'esponenziale immaginario puro a pulsazione ω:

$$y(t) = \mathcal{S}\left[e^{j\omega t}\right] = \int_{\mathbb{R}} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)}\, d\tau = H(\omega) e^{j\omega t} = H(\omega) x(t)$$

dove

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

La stabilità di $\mathcal{S}$ assicura che $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e quindi che tale integrale converga. Si riconosce inoltre che $H(\omega)$ espresso in questo modo coincide con la trasformata di Fourier (tempo continuo) di $h(t)$.

2. Usando la formula di Eulero esprimiamo $\cos(\omega_0 t)$ come somma di due esponenziali immaginari puri, e poi calcoliamo l'uscita corrispondente usando la risposta in frequenza:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) \tag{2}$$

$$y(t) = \mathcal{S}[x](t) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{S}\left[e^{j\omega_0 t}\right] + \mathcal{S}\left[e^{-j\omega_0 t}\right]\right] = \frac{1}{2}\left[H(\omega_0) e^{j\omega_0 t} + H(-\omega_0) e^{-j\omega_0 t}\right] \tag{3}$$

Ora, siccome h è reale, $\forall \omega \in \mathbb{R}$,

$$\overline{H(\omega)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t}\, dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(t)} e^{j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j(-\omega)t}\, dt = H(-\omega)$$

Ne segue che, $\forall \omega \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|H(-\omega)| &= \left|\overline{H(\omega)}\right| = |H(\omega)| & \qquad \angle H(-\omega) &= \angle\overline{H(\omega)} = -\angle H(\omega) \\
H(\omega) &= |H(\omega)|\, e^{j\angle H(\omega)} & H(-\omega) &= |H(\omega)|\, e^{-j\angle H(\omega)}
\end{aligned}$$

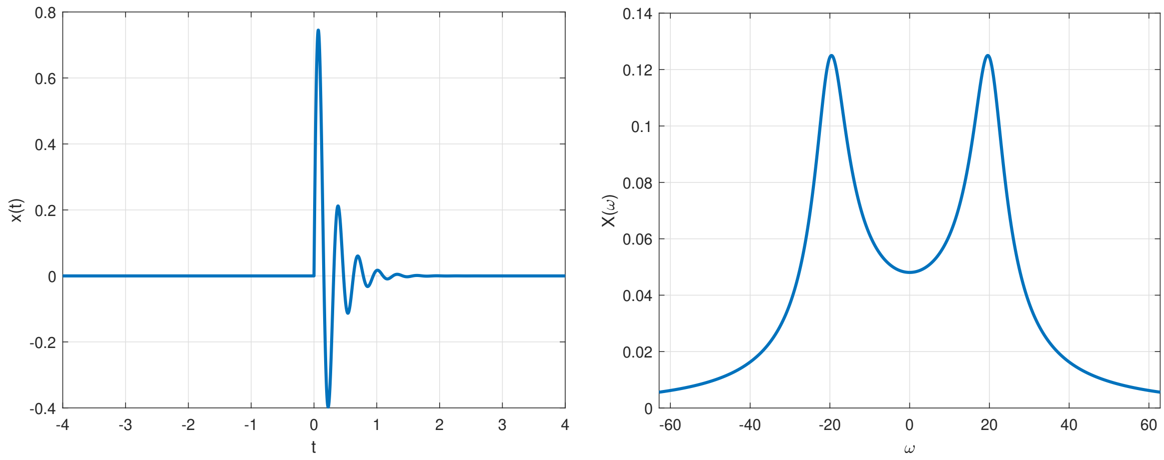

Figura 5: I grafici prodotti dallo script

Applichiamo quanto trovato a $H(\omega_0)$ nell'equazione (3):

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[H(\omega_0)e^{j\omega_0 t} + H(-\omega_0)e^{-j\omega_0 t}\right] = \frac{1}{2}\left[|H(\omega_0)|\, e^{j\angle H(\omega_0)}e^{j\omega_0 t} + |H(\omega_0)|\, e^{-j\angle H(\omega)}e^{-j\omega_0 t}\right]$$
$$= \frac{1}{2}|H(\omega_0)|\left[e^{j(\omega_0 t + \angle H(\omega_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \angle H(\omega_0)}\right] = |H(\omega_0)| \cos\left[\omega_0 t + \angle H(\omega_0)\right]$$

Si trova quindi l'espressione desiderata con

$$A = |H(\omega_0)| \qquad\qquad \phi = \angle H(\omega_0)$$

Domanda di Matlab : Rappresentazione di segnali, 3 punti

Si consideri il segnale $x(t) = e^{-4t}\sin(20t)u(t)$. Scrivere uno script Matlab che:

1. Calcoli $x(t)$ nell'intervallo $(-4, 4)$ campionato a passo $\Delta = 10^{-3}$.
2. Tracci in una figura l'andamento di $x(t)$ nel suddetto intervallo.
3. Usando la FFT, tracci in una seconda figura l'andamento del modulo della trasformata di Fourier di x nell'intervallo di valori di pulsazione $(-20\pi, 20\pi)$, verificando che sia possibile calcolare $X(\omega)$ in tale intervallo, identificando correttamente la scala delle pulsazioni. Per il calcolo della FFT, usare un opportuno zero-padding.

Soluzione dell'esercizio

L'intervallo di pulsazioni della TFtc che si riesce a rappresentare usando la TFtd dei campioni di un segnale presi a passo Δ è $(-\omega_{\max}, \omega_{\max})$, dove $\omega_{\max} = \frac{\pi}{\Delta}$. Quindi, siccome $\Delta = 10^{-3}$, abbiamo $\omega_{\max} = 1000\pi$, quindi l'intervallo richiesto ricade all'interno di quello in cui è possibile calcolare la TFtc. Ora, $X(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega-(20+4j)} - \frac{1}{\omega-(20+4j)}\right)$, quindi il campionamento comporta inevitabilmente aliasing. Tuttavia, siccome le repliche sono distanziate di 1000π, il contributo dell'aliasing viene considerato trascurabile.

Una possibile implementazione dello script è la seguente:

```
%% 4.1
u = @(t) t>=0;
Delta = 1e-3; T=4;
t = -T:Delta:T;
x= sin(20*t).*exp(-4*t).*u(t);
```

```matlab
%% 4.2
figure(1);
h=plot(t,x,'LineWidth',2);
grid; xlabel('t'); ylabel('x(t)');
%%  4.3
M=2^(3+nextpow2(numel(t)));
X = Delta*(abs(fft(x,M)));
figure(2);
omegaMax=pi/Delta;
step = 2/M *omegaMax;
w = -omegaMax:step:(omegaMax-step);
plot(w,fftshift(abs(X)),'LineWidth',2);
grid;xlabel('\omega'); ylabel('X(\omega)')
xlim([-20*pi, 20*pi]);
```