SEGNALI E SISTEMI
16 giugno 2025
Primo appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2025-2026)
SOLUZIONI

Esercizio 1 [punti 7]

Si consideri il sistema

$$y(t) = x(t-1) + \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, e^{-3(t-\tau)}\, d\tau$$

1. Dire se è a) statico, b) causale, c) lineare, d) tempo-invariante, e) BIBO-stabile, giustificando le risposte [1 punto per ognuno dei 5 quesiti].

2. Tovare la risposta impulsiva $h(t)$ e la sua trasformata di Fourier $H(j\omega)$ [2 punti].

Soluzione.

1. a) Il sistema non é statico poichè per calcolare $y(t)$ non è sufficiente conoscere $x(t)$ ma, ad esempio, serve conoscere anche $x(t-1)$. Il sistema è in effetti una convoluzione. Si noti infatti che l'uscita si può scrivere come

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t-1) + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, 1(t-\tau)\, e^{-3(t-\tau)}\, d\tau \\ &= x(t-1) + x(t) * [e^{-3t}\, 1(t)] \\ &= x * h(t)\ , \end{aligned}$$

   con risposta impulsiva globale

$$h(t) = \delta(t-1) + e^{-3t}\, 1(t)\ .$$

   c,d) Essendo una convoluzione, il sistema è certamente LTI. b) Inoltre, essendo $h(t) = 0$ per $t < 0$, il sistema è causale. e) Infine, il sistema è BIBO-stabile poichè $h(t)$ è assolutamente integrabile.

2. La risposta impulsiva è quella riportata al punto precedente. La sua trasformata di Fourier si può facilmente ricavare dalla trasformata di Laplace, ovvero

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} = e^{-s} + \frac{1}{s+3}\Big|_{s=j\omega} = e^{-j\omega} + \frac{1}{3+j\omega}$$

Esercizio 2 [punti 7]

Sia dato il sistema a tempo continuo LTI con risposta impulsiva:

$$h(t) = (t + \sin(2t) + e^{-2t}) \cdot 1(t)$$

con $1(t)$ gradino unitario.

1. Trovare la funzione di trasferimento [2 punti].
2. Dire se il sistema è BIBO stabile, motivando la risposta [1 punto].
3. Trovare l'equazione differenziale associata [1 punto].
4. Dato il segnale $x(t)$, con trasformata di Laplace
$$X(s) = \frac{s}{(s+1)(s+3)} \ ,$$
trovare $x(t)$ [1 punto].
5. Dire se l'uscita forzata $y_f(t)$ relativa al segnale $x(t)$ è limitata oppure no [2 punti] (si fa notare come non sia necessario eseguire il calcolo esatto dei residui di $y_f(t)$ quando si esegue l'estrazione dei poli).

Soluzione.

1. Ricordando le regole della trasformata di Laplace si ottiene
$$H(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{s+2}$$
2. I poli sono: $p_1 = 0$ doppio, $p_{2,3} = \pm 2j$ semplici, e $p_4 = -2$ semplice. Perciò il sistema non è BIBO stabile in quanto i poli $p_{1,2,3}$ hanno parte reale identicamente uguale a zero, e non strettamente minore di zero. La BIBO stabilità si vede anche nel dominio del tempo, in cui la risposta impulsiva non decade al crescere di t, e pertanto non risulta assolutamente integrabile.
3. L'equazione differenziale associata al sistema si ricava scrivendo $H(s)$ nella forma
$$H(s) = \frac{s^4 + 3s^3 + 10s^2 + 4s + 8}{s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 8s^2}$$
da cui
$$\begin{aligned} & y^V(t) + 2y^{IV}(t) + 4y'''(t) + 8y''(t) \\ & \qquad = x^{IV}(t) + 3x'''(t) + 10x''(t) + 4x'(t) + 8x(t) \end{aligned}$$

4. Per trovare l'antitrasformata di $X(s)$ si procede all'estrazione dei poli

$$X(s) = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+3}$$

Per il calcolo dei residui R_k si procede come di consueto

$$R_1 = \lim_{s\to -1} (s+1) \cdot X(s) = -\tfrac{1}{2}$$
$$R_2 = \lim_{s\to -3} (s+3) \cdot X(s) = \tfrac{3}{2}$$

per cui $x(t) = -\frac{1}{2}\, e^{-t}\, 1(t) + \frac{3}{2}\, e^{-3t}\, 1(t)$.

5. La trasformata di Laplace di $y_f(t)$ è:

$$\begin{aligned} Y_f(s) &= H(s) \cdot X(s) \\ &= \frac{s}{(s+1)(s+3)} \cdot \frac{s^4 + 3s^3 + 10s^2 + 4s + 8}{s^2(s^2+4)(s+2)} \\ &= \frac{s^4 + 3s^3 + 10s^2 + 4s + 8}{s(s^2+4)(s+1)(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{R_1}{s} + \frac{R_2 s + R_3}{s^2+4} + \frac{R_4}{s+1} + \frac{R_5}{s+2} + \frac{R_6}{s+3} \end{aligned}$$

che nel tempo corrisponde a

$$y(t) = \left[R_1 + R_2 \cos(2t) + \tfrac{1}{2} R_3 \sin(2t) + R_4\, e^{-t} + R_5\, e^{-2t} + R_6\, e^{-3t}\right] 1(t)$$

che è un segnale limitato.

Esercizio 3 [punti 7]

Siano dati i segnali a tempo discreto

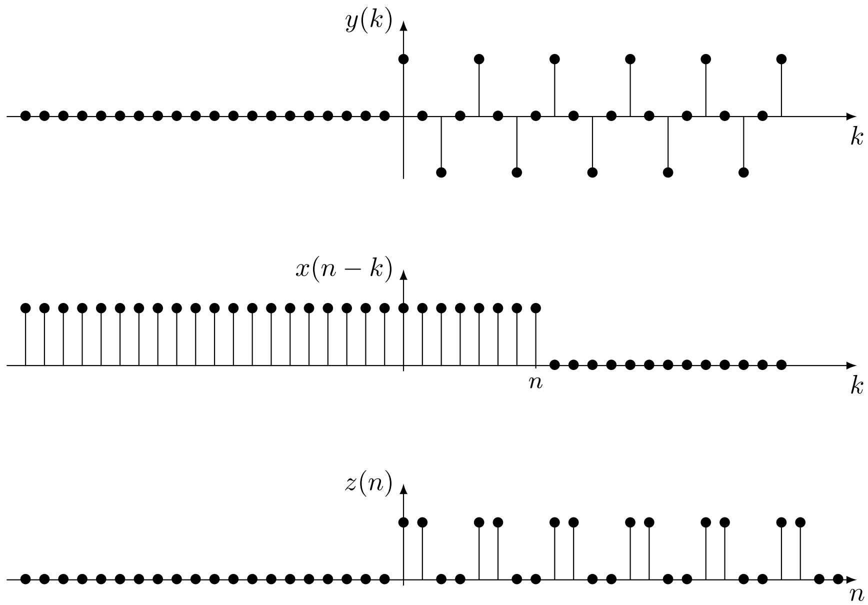
$$x(n) = 1_0(n)$$
$$y(n) = \cos(\tfrac{\pi}{2} n)\, 1_0(n)$$

con $1_0(n)$ il gradino discreto (di valore 1 per $n \geq 0$ e zero altrove). Dopo aver disegnato i due segnali, si chiede di:

1. calcolare il segnale convoluzione $z(n) = x * y(n)$, e disegnarlo [5 punti].
2. calcolare la potenza dei tre segnali, x, y, e z [2 punti].

Soluzione.

1. I segnali $y(k)$ e $x(n-k)$ sono quelli illustrati in figura.



Impiegando quindi il metodo grafico si ottiene

$$z(n) = \begin{cases} 0 & , n < 0 \\ 1 & , n = 4k,\ k \geq 0 \\ 1 & , n = 4k+1 \\ 0 & , n = 4k+2 \\ 0 & , n = 4k+3 \end{cases}$$

con k intero positivo.

2. Per le potenze, da semplici calcoli e considerando la natura ternaria dei segnali (valori $0, 1, -1$), si ha

$$P_x = \tfrac{1}{2}\ , \qquad P_y = P_z = \tfrac{1}{4}\ .$$

Esercizio 4 [punti 3]

Il segnale a tempo discreto

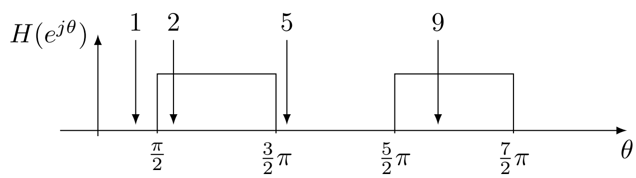
$$x(n) = 7 + \cos(n) - 3\sin(2n) + e^{-j5n} + 7\cos(9n)$$

viene filtrato da un filtro passa-alto ideale con pulsazione di taglio $\theta_c = \frac{\pi}{2}$, ovvero con risposta in frequenza

$$H(e^{j\theta}) = \begin{cases} 0 & , |\theta| < \frac{\pi}{2} \\ 1 & , \frac{\pi}{2} < |\theta| < \pi \end{cases}$$

nel periodo fondamentale $[-\pi, \pi]$. Si chiede di valutare il segnale di uscita $y(n)$.

Soluzione Data la natura esponenziale complessa/sinusoidale delle componenti del segnale, in questo caso è sufficiente capire se le pulsazioni delle diverse componenti ricadono o meno nella banda passante del filtro. Graficamente per θ positive si ha



e pertanto

$$y(n) = -3\sin(2n) + 7\cos(9n)$$

Esercizio 5 [punti 3]

Sia dato il segnale $x(t) = \mathrm{sinc}^2(2t) + \cos(10t)$. Dopo aver identificato la banda del segnale, si chiede di proporre uno schema di campionamento/interpolazione in banda base in grado di ricostruire esattamente il segnale dai propri campioni, specificando il più grande passo di campionamento T che ne garantisca la ricostruibilità.

Soluzione Passando al dominio di Fourier si ha

$$\mathrm{sinc}(2t) \quad \longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{4\pi})$$

con estensione $[-2\pi, 2\pi]$ e pertanto, sfruttando le regole della convoluzione, nel dominio di Fourier il segnale sinc^2 avrà estensione $[-4\pi, 4\pi]$. Il coseno ha pulsazione $10 < 4\pi$, e pertanto la banda del segnale risulta $[-4\pi, 4\pi]$. Per la scelta della pulsazione di campionamento minima, usiamo il teorema di Shannon, per cui $\omega_s = 2\pi/T_s \geq 2\omega_M = 8\pi$, ovvero $T_s \leq \frac{1}{4}$, per cui il valore richiesto è $T_s = \frac{1}{4}$.

Esercizio 6 - Matlab [punti 3]

Si consideri un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni, collezionati con passo di campionamento T, siano contenuti nel vettore `x`. Dato il seguente script (che deriva numericamente la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$:

```
Nx = length(x);
omx = (0:Nx-1)*pi/(Nx*T);
X = T*fft(x);
semilogy(omx,abs(X));
```

Dopo aver individuato e corretto un errore presente nel codice, si dica cosa rappresenta `omx` e perché viene calcolato in quel modo.

Soluzione L'errore sta nella definizione di `omx`, in cui manca un fattore 2, ovvero

```
omx = (0:Nx-1)*2*pi/(Nx*T);
```

Il vettore `omx` rappresenta infatti l'asse delle pulsazioni. Viene calcolato in quel modo perché la funzione `fft` restituisce `Nx` campioni della trasformata di Fourier, equispaziati nell'intervallo di pulsazioni $[0, \omega_c)$, con $\omega_c = 2\pi/T$.