SEGNALI E SISTEMI
Seconda prova di autovalutazione 2025
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2024-2025)
12 maggio 2025
SOLUZIONI

Esercizio 1 – [7 punti]

Il segnale

$$s(t) = \mathrm{rep}_1 \mathrm{triang}(2t) + 5\,\cos(4\pi t)$$

viene filtrato da un filtro con funzione di trasferimento

$$H(j\omega) = \mathrm{sinc}(\tfrac{\omega}{2\pi})$$

1. Dire se $s(t)$ è periodico ed in caso affermativo quale sia il periodo.
2. Calcolare i coefficienti della serie di Fourier S_k.
3. Calcolare il segnale $y(t) = s * h(t)$ in uscita dal filtro.

Soluzione.

1. Il primo contributo del segnale è evidentemente periodico di periodo 1, mantre il coseno è periodico di periodo $\frac{1}{2}$, pertanto il segnale è periodico di periodo $T_p = 1$.
2. Per il calcolo di coefficienti della serie di Fourier si noti che $\omega_0 = 2\pi/T_p = 2\pi$. Quindi, i coefficienti della serie si possono calcolare in vari modi. Sfruttando la regola di convoluzione (periodica) e sviluppando il coseno tramite Eulero il segnale si può scrivere nella forma

   $$s(t) = 2\,x * x(t) + \tfrac{5}{2}\,e^{j2\omega_0} + \tfrac{5}{2}\,e^{-j2\omega_0}\;, \quad x(t) = \mathrm{rep}_1\,\mathrm{rect}(2t)$$

   con $x(t)$ onda quadra avente duty cycle $d = \frac{1}{2}$, e pertanto

   $$\begin{aligned} S_k &= 2X_k^2 + \tfrac{5}{2}\,\delta(k-2) + \tfrac{5}{2}\,\delta(k+2) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{sinc}^2(\tfrac{k}{2}) + \tfrac{5}{2}\,\delta(k-2) + \tfrac{5}{2}\,\delta(k+2) \end{aligned}$$

   Alternativamente, per chi conosce la regola di campionamento dalla trasformata di Fourier, si ha

   $$u(t) = \mathrm{triang}(2t) \quad \Longrightarrow \quad U(j\omega) = \tfrac{1}{2}\mathrm{sinc}^2(\tfrac{\omega}{4\pi})$$

   da cui

   $$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{T_p} U(jk\omega_0) + \tfrac{5}{2}\,\delta(k-2) + \tfrac{5}{2}\,\delta(k+2) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{sinc}^2(\tfrac{k}{2}) + \tfrac{5}{2}\,\delta(k-2) + \tfrac{5}{2}\,\delta(k+2) \end{aligned}$$

   Oppure si possono calcolare i coefficienti di Fourier a_k dell'onda quadra, che rappresenta la derivata dell'onda triangolare, ed utilizzare la proprietà di integrazione. La suddetta onda quadra si può infatti pensare come la differenza tra due onde quadre canoniche, di ampiezza 2, pulsazione fondamentale 2π, e duty cicle $\frac{1}{2}$, la prima traslata in $-\frac{1}{4}$ e la seconda in $\frac{1}{4}$. Per cui:

$$a_k = 2 \cdot [\frac{1}{2} sinc(\frac{k}{2}) \cdot e^{jk\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} sinc(\frac{k}{2}) \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}}]$$

Da cui, i coefficienti dell'onda triangolare, per $k \neq 0$,

$$T_k = \frac{a_k}{jk \cdot 2\pi} = \tfrac{1}{2}\mathrm{sinc}^2(\tfrac{k}{2})$$

da cui

$$S_k = T_k + \tfrac{5}{2}\,\delta(k-2) + \tfrac{5}{2}\,\delta(k+2) = \tfrac{1}{2}\mathrm{sinc}^2(\tfrac{k}{2}) + \tfrac{5}{2}\,\delta(k-2) + \tfrac{5}{2}\,\delta(k+2)$$

3. Il filtraggio è un prodotto tra i coefficienti di Fourier e la funzione di traferimento calcolata per $\omega = k\omega_0 = k \cdot 2\pi$, ovvero

$$\begin{aligned} Y_k &= X_k\, H(jk\omega_0) \\ &= \Big(\tfrac{1}{2}\mathrm{sinc}^2(\tfrac{k}{2}) + \tfrac{5}{2}\,\delta(k-2) + \tfrac{5}{2}\,\delta(k+2)\Big) \cdot \mathrm{sinc}(k) \end{aligned}$$

in cui $\mathrm{sinc}(0) = 1$ e $\mathrm{sinc}(k) = 0$ per $k \neq 0$, ovvero $\mathrm{sinc}(k) = \delta(k)$. Pertanto solo il coefficiente in $k = 0$ viene mantenuto

$$Y_k = \tfrac{1}{2}\mathrm{sinc}^2(\tfrac{k}{2}) \cdot \delta(k) = \tfrac{1}{2}\,\delta(k)$$

e si ha $y(t) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 2 [7 punti]

Determinare i segnali $x(t)$ che soddisfano le seguenti condizioni:

1. $x(t)$ è reale e pari;
2. $x(t)$ è periodico di periodo 8 con coefficienti di Fourier a_k;
3. $a_k = 0$ per $|k| > 2$;
4. $\frac{1}{8}\int_0^8 x(t)dt = -3$;
5. $\int_1^9 |x(t)|^2 dt = 92$;
6. $\int_{-1}^7 x(t)e^{j\frac{\pi}{2}t} dt = -8$;

Soluzione.

Il segnale ha pulsazione fondamentale $\omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Dalle proprietà 4) e 2) deduciamo che

$$a_0 = \frac{1}{8}\int_0^8 x(t)dt = -3$$

Dalla proprietà 1) si ha che $a_{-1} = a_1$ e $a_{-2} = a_2$. Dalla proprietà 6) si ha che

$$a_{-2} = \frac{1}{8}\int_{-1}^{7} x(t)e^{-j(-2)\frac{\pi}{4}t}dt = \frac{-8}{8} = -1 = a_2$$

Dalle proprietà 3) e 5) e dal teorema di Parseval, invece, si ha che

$$P_8 = \frac{1}{8}\int_1^9 |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-2}^{2} |a_k|^2 = \frac{92}{8} = \frac{23}{2}$$

da cui

$$9 + 2|a_1|^2 + 2 = \frac{23}{2}$$

$$|a_1|^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_1 = a_{-1} = \pm\frac{1}{2}$$

Per cui, i segnali che soddisfano le condizioni richieste sono

$$x(t) = -3 \pm \cos(\tfrac{\pi}{4}t) - 2\cos(\tfrac{\pi}{2}t)$$

Esercizio 3 – [3 punti]

Il segnale a tempo discreto

$$x(n) = 2 + \cos(\tfrac{8\pi}{15}n - \tfrac{\pi}{4}) - e^{-j\frac{\pi}{6}n} - 2\,\sin(\tfrac{3\pi}{2}n + \tfrac{\pi}{6})$$

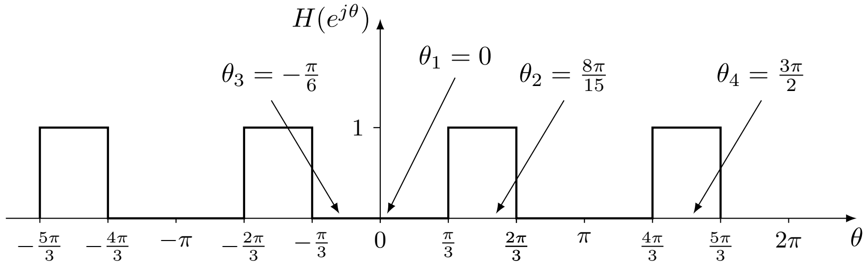
viene filtrato con un filtro passa banda ideale avente risposta in frequenza definita in $(-\pi, \pi]$ come

$$H(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & \frac{\pi}{3} \leq |\theta| < \frac{2\pi}{3} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Trovare l'uscita $y(n)$.

Soluzione.

La risposta in frequenza è disegnata in fugura (si ricorda che la risposta in frequenza di un sistema LTI a tempo discreto è periodica di periodo 2π; in figura sono rappresentati 2 periodi).



Il segnale $x(n)$ è la somma di quattro contributi:

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) + x_3(n) + x_4(n)$$

con $x_1(n) = 2$, $x_2(n) = \cos(\frac{8\pi}{15}n - \frac{\pi}{4})$, $x_3(n) = -e^{-j\frac{\pi}{6}n}$, $x_4(n) = -2\sin(\frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{6})$

Ora, $x_1(n)$ ha pulsazione $\theta_1 = 0$ e viene quindi cancellato; $x_2(n)$ ha pulsazioni $\theta_2 = \pm\frac{8\pi}{15}$ che cadono nella banda passante del filtro e passa quindi inalterato; $x_3(n)$ ha pulsazione $\theta_3 = -\frac{\pi}{6}$ che cade nella banda oscura e quindi viene cancellato; $x_4(n)$ ha pulsazioni $\theta_4 = \pm\frac{3\pi}{2}$ che cadono nella banda passante del filtro e passa quindi inalterato. Il segnale di uscita è quindi:

$$y(n) = \cos(\frac{8\pi}{15}n - \frac{\pi}{4}) - 2\sin(\frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{6})$$