SEGNALI E SISTEMI
Prima prova di autovalutazione 2025
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2024-2025)
31 marzo 2025
SOLUZIONI

Esercizio 1 Proprietà dei Sistemi– [punti 7]

Dato il sistema a tempo discreto definito dall'equazione:

$$y(n) = \begin{cases} |x(n) + x(n-1)| & n < 0 \\ x^2(n) & n \geq 0. \end{cases}$$

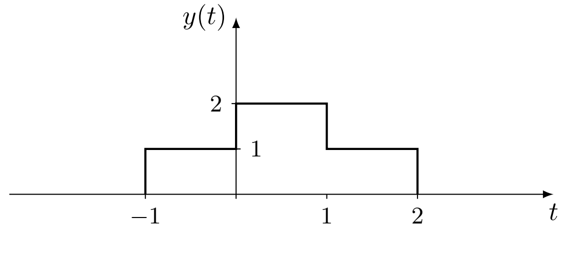
1. Dire se è statico, causale, lineare, tempo-invariante e BIBO stabile [5 punti], giustificando opportunamente le risposte.
2. Calcolare la risposta impulsiva [1 punto].
3. Calcolare la risposta al gradino [1 punto].

Soluzione.

1. non è statico poiché per calcolare l'uscita al tempo n_0 è necessario conoscere l'ingresso al tempo $n_0 - 1$. E' invece causale poiché per calcolare l'uscita al tempo n è necessario conoscere l'ingresso ai tempi $n \leq n_0$. Non è lineare perchè nè il modulo nè il quadrato sono funzioni lineari. Non è tempo-invariante a causa della condizione su n. E' chiaramente BIBO stabile.
2. La risposta impulsiva è $h(n) = \delta(n)$.
3. La risposta al gradino è $h_{-1}(n) = 1(n)$.

Esercizio 2 – Convoluzione e sue proprietà [punti 7]

Siano dati il segnale $x(t) = \text{rect}(t)$ ed il segnale $y(t)$ illustrato in figura.

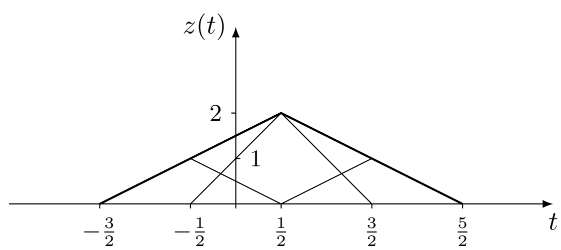


Si chiede di:

1. Calcolare la derivata generalizzata di $y(t)$;

2. Calcolare e disegnare il segnale convoluzione $z(t) = x * y(t)$;
3. Calcolare l'area e l'estensione del segnale convoluzione $z(t)$;
4. Calcolare la convoluzione $q(t)$ tra $x(t - \frac{1}{2})$ e $y(t + 1)$.

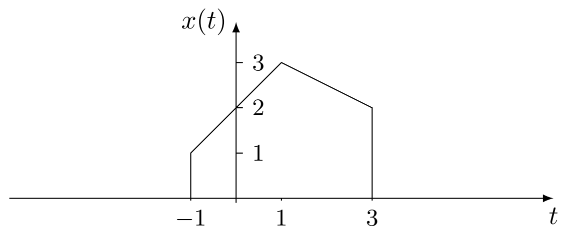
Soluzione.

1. Ls derivata generalizzata si calcola per ispezione, identificando i punti di discontinuità (altrove il segnale è costante) e si ottiene
$$y'(t) = \delta(t + 1) + \delta(t) - \delta(t - 1) - \delta(t - 2) \ .$$
2. La convoluzione si calcola agevolmente considerando che
$$y(t) = \mathrm{rect}(t + \tfrac{1}{2}) + 2\,\mathrm{rect}(t - \tfrac{1}{2}) + \mathrm{rect}(t - \tfrac{3}{2})$$
e ricordando che $\mathrm{rect} * \mathrm{rect}(t) = x * \mathrm{rect}(t) = \mathrm{triangle}(t)$. Pertanto
$$\begin{aligned} z(t) &= x * y(t) \\ &= x * \mathrm{rect}(t + \tfrac{1}{2}) + 2\,x * \mathrm{rect}(t - \tfrac{1}{2}) + x * \mathrm{rect}(t - \tfrac{3}{2}) \\ &= \mathrm{triangle}(t + \tfrac{1}{2}) + 2\,\mathrm{triangle}(t - \tfrac{1}{2}) + \mathrm{triangle}(t - \tfrac{3}{2}) \end{aligned}$$
che, come illustrato in figura, restituisce
$$z(t) = 2\,\mathrm{triangle}(\tfrac{t - \frac{1}{2}}{2})$$


3. L'area si può calcolare dalla figura oppure, equivalentemente, dalla regola del prodotto tra le aree
$$A_z = A_x \cdot A_y = 1 \cdot 4 = 4 \ ,$$
e similmente si ha per l'estensione
$$e(z) = [t_x + t_y, T_x + T_y] = [-\tfrac{1}{2} - 1, \tfrac{1}{2} + 2] = [-\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}] \ .$$
4. Per la convoluzione dei segnali traslati si ottiene, dalla regola di traslazione,
$$q(t) = x * y(t - \tfrac{1}{2} + 1) = z(t + \tfrac{1}{2}) = 2\,\mathrm{triangle}(\tfrac{1}{2}t) \ .$$

Esercizio 3 – Semplici trasformazioni di segnali [punti 3]

Dato il segnale $x(t)$ illustrato in figura,

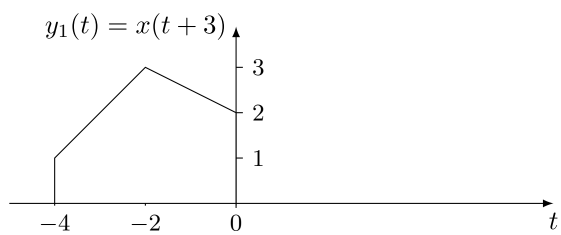


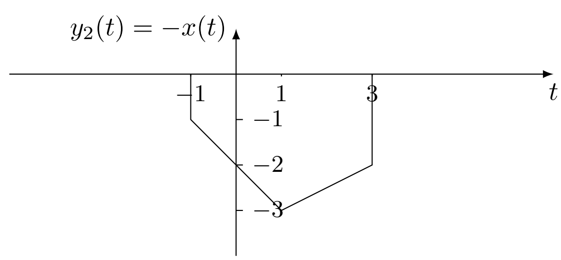
si disegnino i segnali:

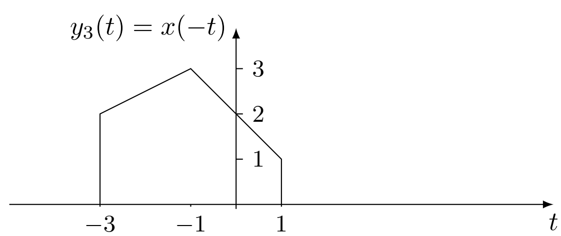
1. $y_1(t) = x(t+3)$
2. $y_2(t) = -x(t)$
3. $y_3(t) = x(-t)$
4. $y_4(t) = x(\frac{t}{2})$
5. $y_5(t) = x(\frac{t}{2}+3)$

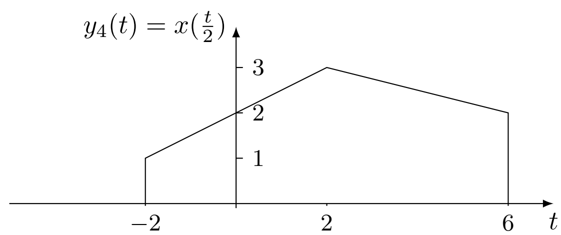
Soluzione.

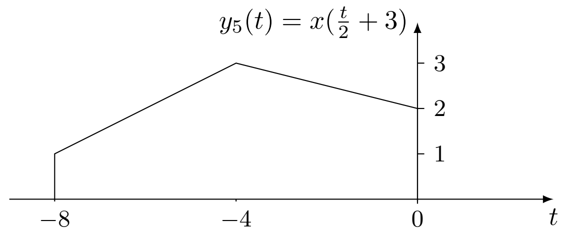
I segnali sono mostrati in figura











Esercizio 4 – Energia e potenza di segnali discreti [punti 3]

Sia dato il segnale discreto

$$s(n) = 2\cos(8n) + j\, e^{j\frac{\pi}{24}n}$$

1. Si identifichi se il segnale è periodico ed in caso affermativo quale sia la sua periodicità;

2. Si identifichino l'energia E_s e la potenza P_s del segnale;

3. Si identifichino energia e potenza per i segnali $x(n) = s(n) \cdot 1_0(n)$ e $y(n) = s(n) + \mathrm{rect}(\frac{1}{9}n)$.

Soluzione.

1. Il coseno non è periodico in quanto la sua pulsazione non è esprimibile nella forma π moltiplicato per un numero razionale, per cui $s(n)$ non è periodico.

2. Dalla proprietà della potenza di combinazioni lineari di sinusoidi si ha

$$P_s = \tfrac{1}{2}2^2 + |j|^2 = 2 + 1 = 3\ ,$$

e pertanto l'energia è infinita.

3. Il segnale $x(n)$ disattiva $s(n)$ a tempi negativi e pertanto, per simmetria, si ha $P_x = \frac{1}{2}P_s = \frac{3}{2}$ e quindi $E_x = \infty$. Per il segnale $y(n)$ stiamo sommando un contributo limitato nel tempo (ovvero a potenza nulla), che pertanto

non cambia le proprietà di potenza in quanto, utilizzando la notazione $z(n) = \mathrm{rect}(\frac{1}{9}n)$,

$$
\begin{aligned}
P_y &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1+2N} \sum_{n=-N}^{N} \underbrace{(s(n)+z(n))}_{y(n)} \underbrace{(s^*(n)+z(n))}_{y^*(n)} \\
&= P_s + P_z + \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1+2N} \sum_{n=-N}^{N} s(n)z(n) + \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1+2N} \sum_{n=-N}^{N} s^*(n)z(n) \\
&= P_s + 0 + 0 + 0 \\
&= P_s = 3 \ ,
\end{aligned}
$$

poichè le somme a numeratore convergono ad un valore finito in quanto $z(n)$ ha estensione temporale limitata, mentre il denominatore $1 + 2N$ tende ad infinito. Inotre $E_y = \infty$.