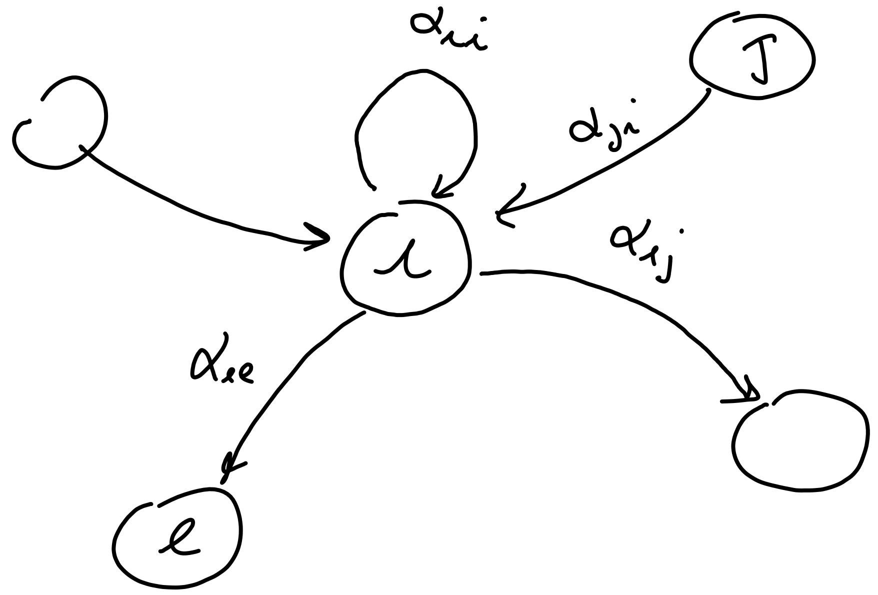
MODELLI DI TRANSIZIONE TRA STATI

$x_1(k)$ = probabilità di essere nello stato 1

$x_2(k)$ = " di essere nello stato 2

⋮

$x_n(k)$ ... n



$i = 1, \dots, n$

$$x_i(k+1) = \sum_{j \neq i} \overbrace{\alpha_{ji}}^{a_{ij}} x_j(k) + \overbrace{\alpha_{ii}}^{a_{ii}} x_i(k)$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} & a_{ij} & \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x(k+1) = A\,x(k)} \qquad x(0) \longrightarrow x(1), x(2), \dots$$

Niente variabili indipendenti

$0 \le x_i(k) \le 1$

$x_1(0) \ge 0$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(k) = 1 \qquad \Longrightarrow \sum_{i=0}^{n} x_i(0) = 1$$

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{1}^T x(k) = 1 \Longleftarrow \mathbb{1}^T x(0) = 1$$

$$[1 \; \dots \; 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} = 1$$

Per avere probabilità devo avere $\alpha_{ij} \ge 0$

ho scelto un qualsiasi $x(0)$ tale che

Se $\forall$ $\mathbb{1}^T x(0) = 1$

$\Longrightarrow$

Deve essere che anche $\boxed{\mathbb{1}^T x(1) = 1}$

$$\boxed{\mathbb{1}^T A x(0) = 1} \qquad x(1) = A x(0)$$

$\forall$ $x(0)$ che sono vettori di probabilità

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{1}^T A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \mathbb{1}^T A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$\vdots$

$$\mathbb{1}^T A \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} = 1$$

a_{1i}
a_{2i}

$$\mathbb{1}^T \begin{array}{c} i \\ \begin{bmatrix} \cdots & a_{1i} & \cdots \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} = 1$$

a_{ji}

$$\mathbb{1}^T \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} = 1$$

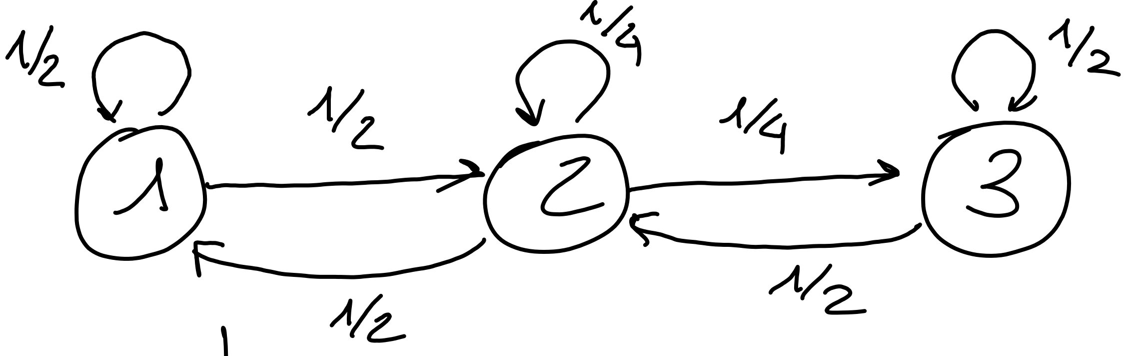
Vincolo su A: gli elementi di ciascuna colonna sommano a 1

<u>Esempio</u> <u>Previsioni del tempo</u>

$x_1(k)$ = probabilità che nel giorno k si ha il sole

$x_2(k)$ = probabilità che nel giorno k ha nuvoloso

$x_3(k)$ = probabilità che nel giorno k piove



$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x(1) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x(2) = A x(1) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/8 \\ 1/8 \end{bmatrix}$$

$$x(3),\ x(4) \cdots \quad x(\infty)$$

$$x_{eq} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$x(k) \simeq x(\infty) = x_{eq}$$

$$\boxed{A x_{eq} = x_{eq}} \Rightarrow$$ x_{eq} è autovettore destro relativo all'autovalore $\lambda = 1$

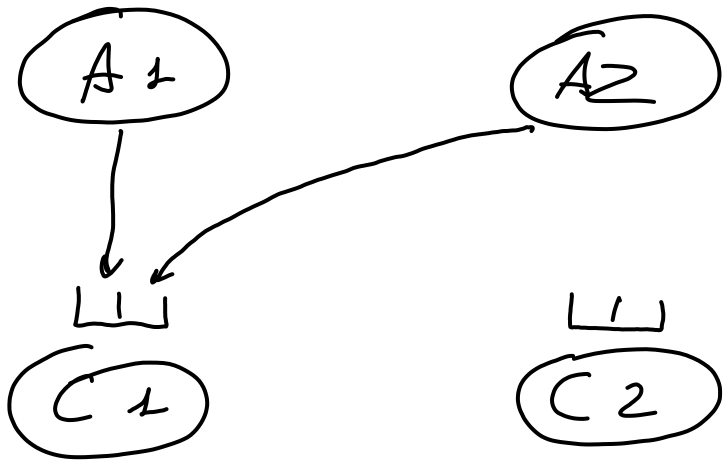
$$\mathbb{1}^T A = [1\ 1\ \cdots\ 1] = \mathbb{1}^T$$

$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ è autovettore sinistro

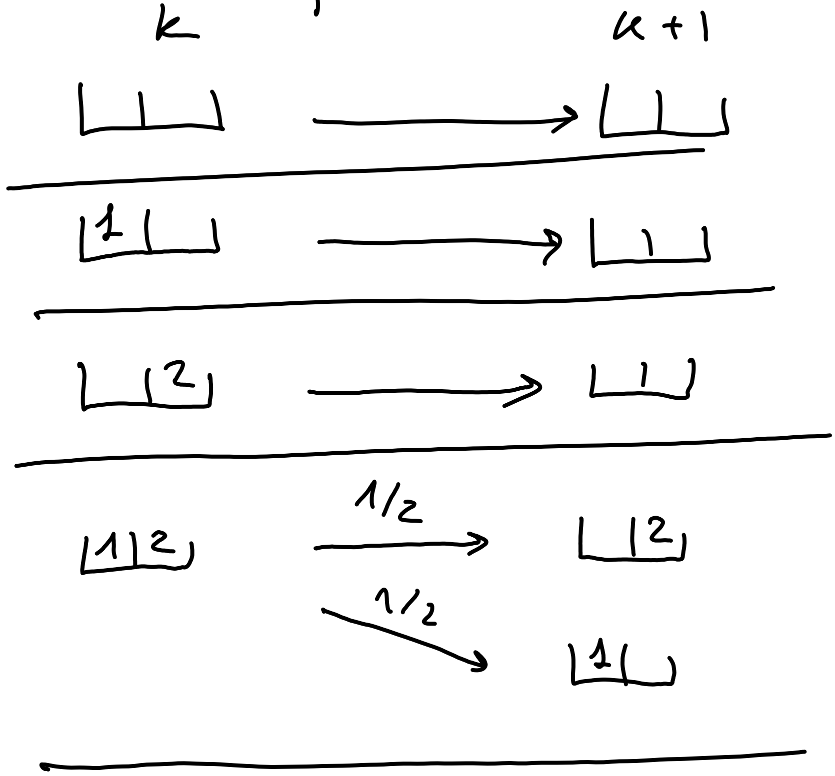
Esempio

Esistono due agenti che a ogni istante k vogliono trasmettere un pacchetto

Esistono due canali di trasmissione



Caso per il canale 1

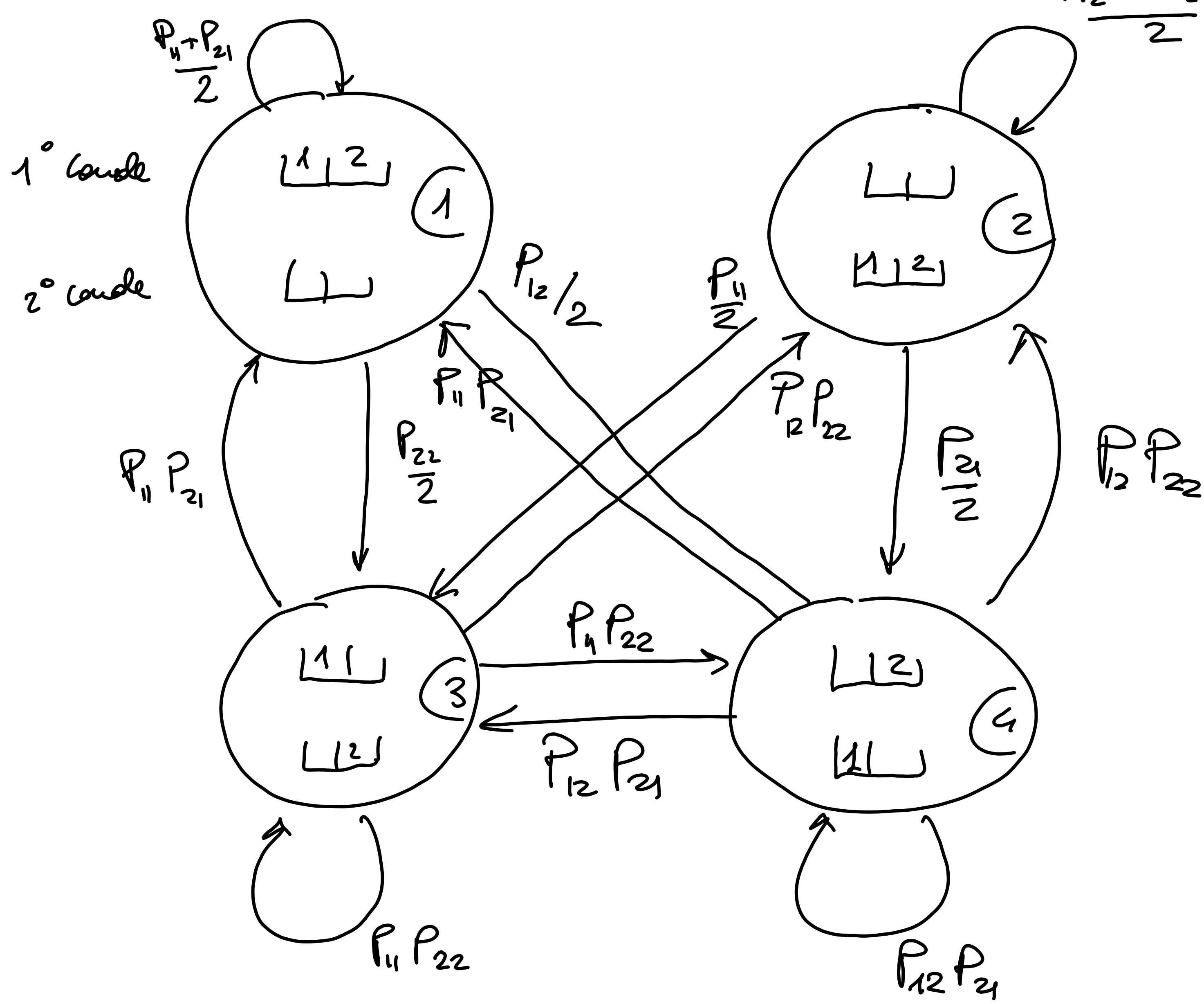


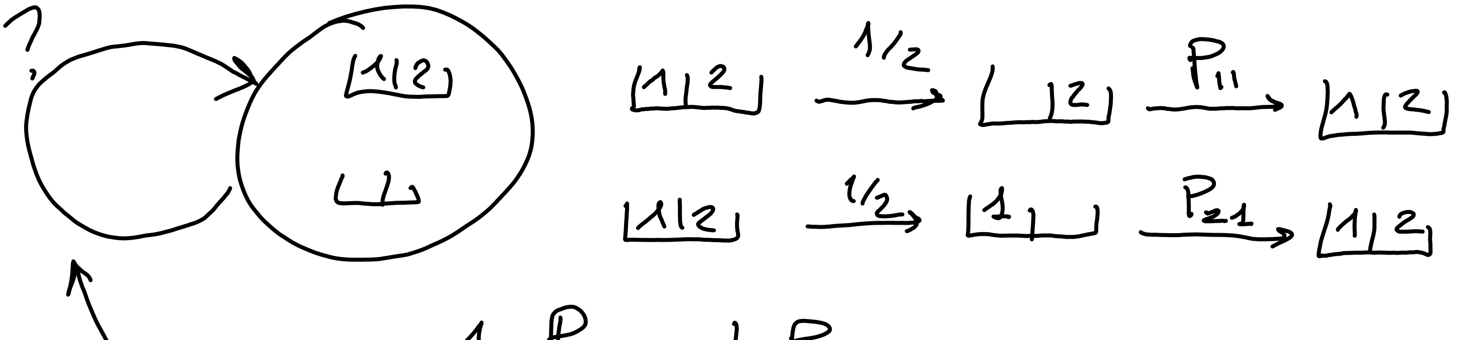
A1 : manda con probabilità P_{11} verso C1

P_{12} verso C2

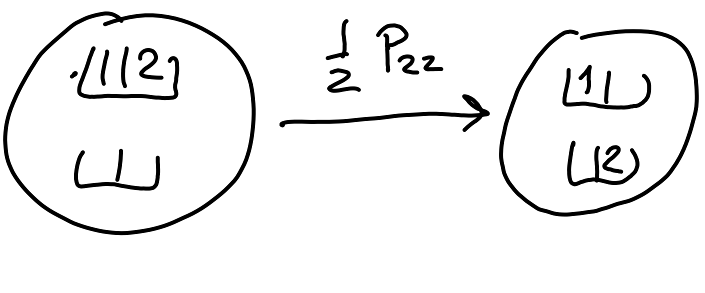
A2 $\begin{cases} P_{21} & C1 \\ P_{22} & C2 \end{cases}$

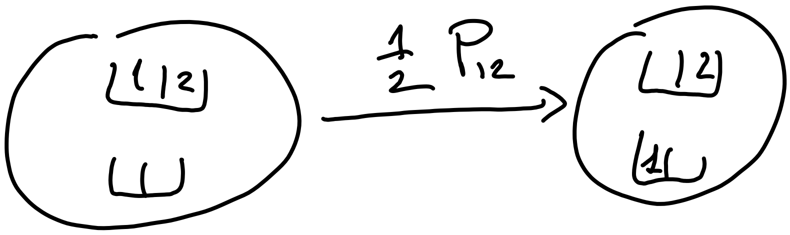
$P_{11} + P_{12} = 1$ $\qquad$ $P_{21} + P_{22} = 1$

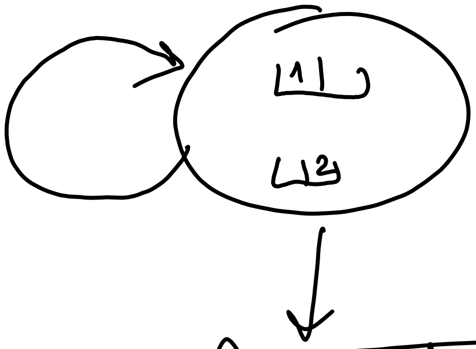


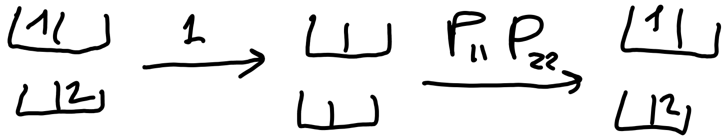


$\frac{1}{2} P_{11} + \frac{1}{2} P_{21}$









$$A = \begin{bmatrix} \frac{P_{11}+P_{21}}{2} & 0 & & \\ 0 & & & \\ P_{22}/2 & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Esempio Page rank di GOOGLE

Immaginiamo che un utente virtuale visiti tutto internet

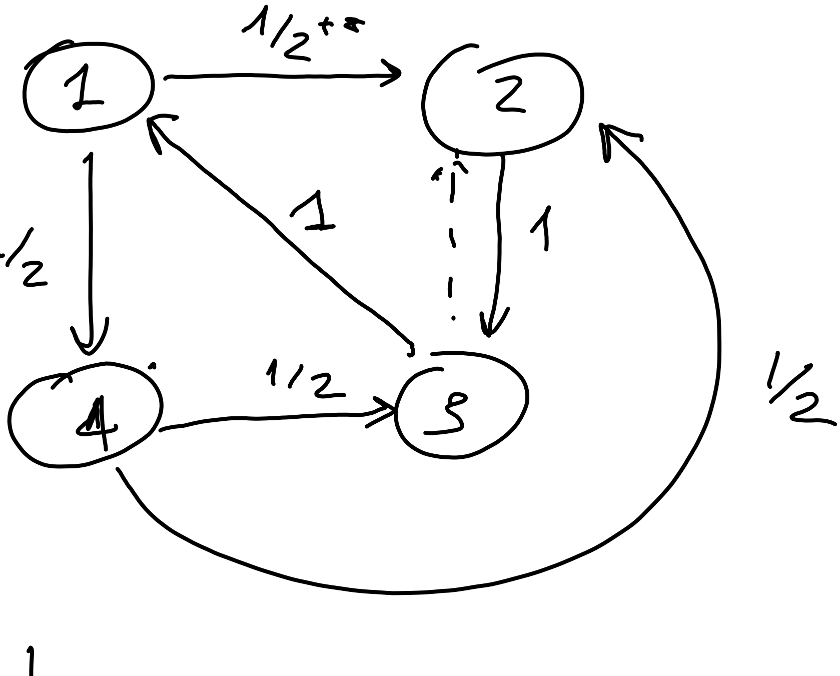
utente è molto pigro e sceglie a caso un link che offre

pag 1
2
4

pag 2
3

pag 3
1

pag 4
2
3



$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X(1) = A\,x(0)$$

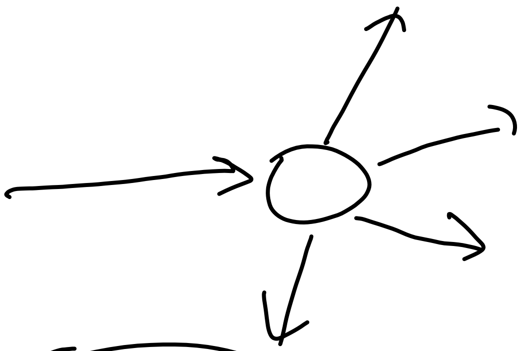
$$A = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ 1/2 & & 0 & 1/2 \\ & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & & 0 & \end{bmatrix}$$

$$X(k) \longrightarrow x_{eq}$$

$$p \simeq 1$$

$$A_{vero} = pA + (1-p)\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1/4 \\ 1/4 \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 1/4 \\ 1/4 \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 1/4 \\ 1/4 \\ \\ \\ \end{matrix} \end{bmatrix}$$

0.99 $\qquad\qquad$ $\frac{0.01}{4}$



$$\mathbb{1}^T A = \mathbb{1}$$

A_{pert}

$$\mathbb{1}^T \begin{bmatrix} 1/4 & & \\ \vdots & & \\ \vdots & & \end{bmatrix} = \mathbb{1}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{1}^T A_{vero} &= \mathbb{1}^T \left(pA + (1-p) A_{pert} \right) \\ &= p \underbrace{\mathbb{1}^T A} + (1-p) \overbrace{\mathbb{1}^T A_{pert}} \\ &= p\, \mathbb{1}^T + (1-p)\, \mathbb{1}^T \\ &= \left[\cancel{p} + (1 - \cancel{p}) \right] \mathbb{1}^T = \mathbb{1}^T \end{aligned}$$