MODELLO / SISTEMA DINAMICO

Descrizione matematica di fenomeni che legano grandezze variabili nel tempo

SEGNALI = FUNZIONI

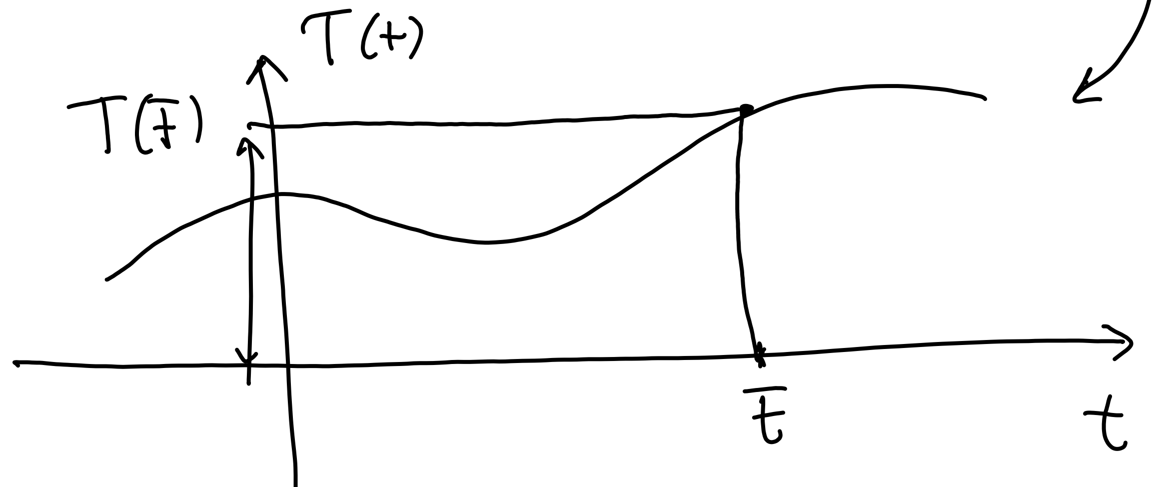
funzione tempo → grandezza

$f(x)$ x y

tempo

Esempio Temperatura $T(t)$

temperatura

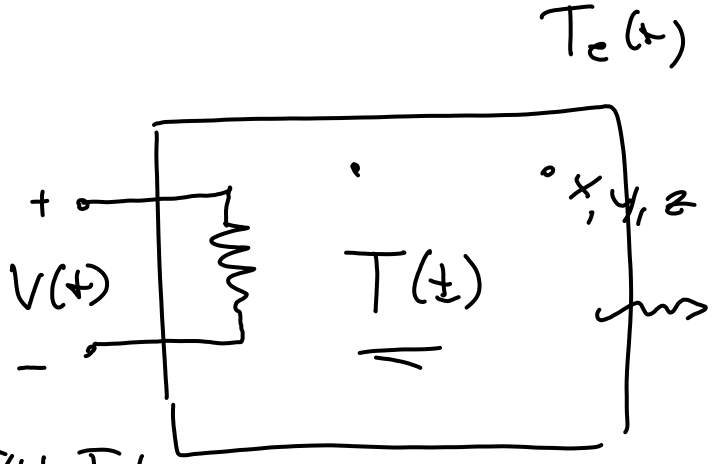


segnali a tempo continuo $t \in \mathbb{R}$

SISTEMA DINAMICO

Un oggetto matematico che descrive il legame tra segnali legati a un fenomeno fisico

Esempio



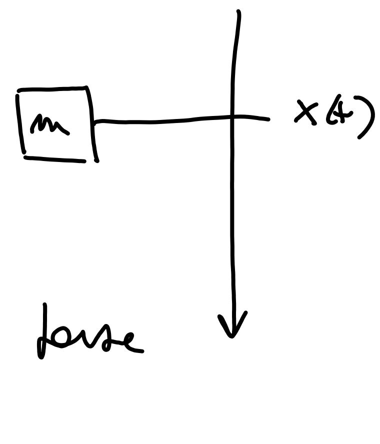
Sistema dinamico è l'"oggetto" matematico che descrive il legame tra $V(t)$, $T(t)$, $T_e(t)$

- $V(t)$ ingresso di controllo
- $T(t)$ uscita
- $T_e(t)$ ingresso di disturbo

$$T(x, y, z, t)$$

"Oggetto" matematico : equazione differenziale

Esempio



Fisico ci dice

m · accelerazione = somma delle forze applicate

↑
parametro

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \dot{x}(t) \qquad a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

$m\dot{v}(t) = \sum F_i(t)$ $F_1(t)$ $F_2(t)$

sono le forze

Esempio: esiste solo

la forza di gravità $F_1(t) = m g$

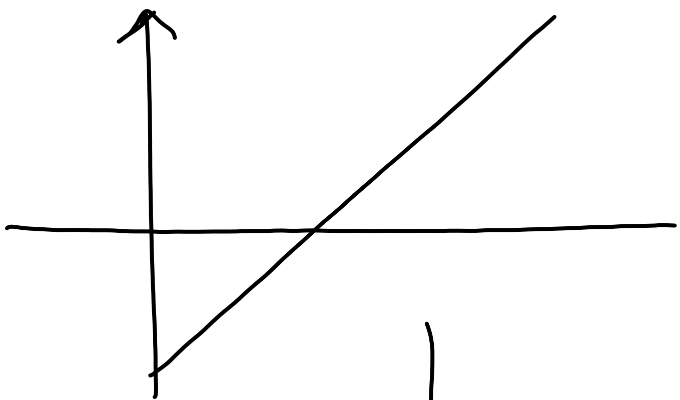
↑ parametro

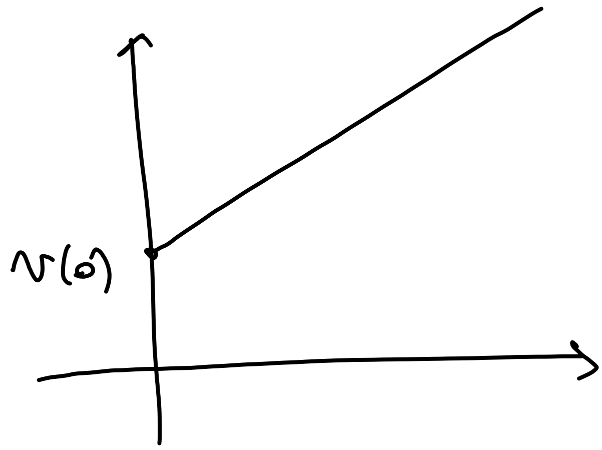
$\cancel{m}\dot{v}(t) = \cancel{m} g$

equazione differenziale

$\dot{v}(t) = g$ $v(t) = g t + q$

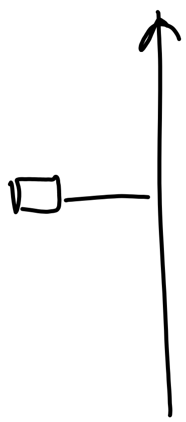
$v(t) = g t + v(0)$

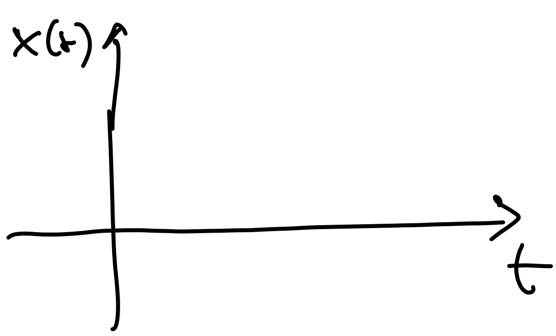


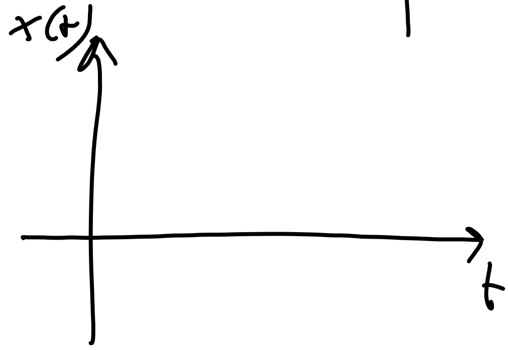


$\dot{v}(t) = -g$

$x(t)$







$$\int_0^{\tau} \dot{X}(t)\,d\tau = v(t) = \int_0^{\tau} \left(gt + v(0)\right) dt$$

$$X(\tau) - X(0) = \frac{1}{2} g t^2 + v(0)\, t \,\Big|_0^{\tau} = \frac{1}{2} g \tau^2 + v(0)\,\tau \; \cancel{- \frac{1}{2} g\, 0^2 + v(0)\, 0}$$

SISTEMI DINAMICI TEMPO DISCRETO

Segnali tempo discreto

descrivono fenomeni che variano in istanti discreti.

$y = f(x)$ $\qquad x \in \mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

t variabile tempo continuo

k variabile tempo discreto

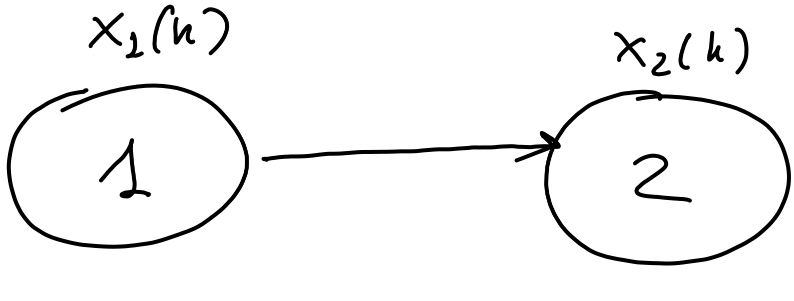
equazione alle differenze : "oggetto" matematico

Esempio

Dinamica di una popolazione con emigrazione

$x_1(k)$ popolazione italiana nell'anno k

$x_2(k)$ popolazione italiana emigrata fuori italia nell'anno k



$x_1(k+1)$ saranno diversi da $x_1(k)$

$x_2(k+1)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $x_2(k)$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) - \frac{1}{1000} x_1(k) + \frac{5}{1000} x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \frac{1}{1000} x_1(k) - \frac{5}{1000} x_2(k) \end{cases}$$

$$x_1(k+1) = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1000}\right)}_{\frac{999}{1000}} x_1(k)$$

$$x_1(k) = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^k x_1(0)$$

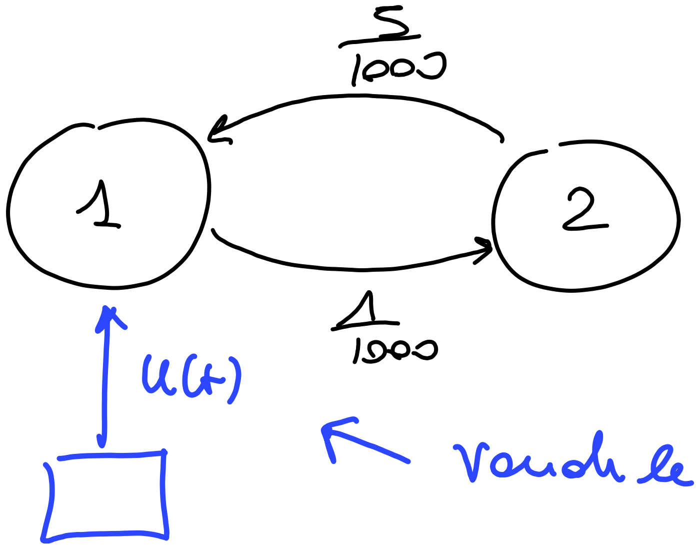
$$x_2(k+1) = x_2(k) + \underline{\frac{1}{1000}\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^k} \underline{x_1(0)}$$

$$x_2(k) = x_2(0) + \overset{h=0}{\frac{1}{1000} x_1(0)} + \overset{h=1}{\frac{1}{1000} x_1(1)} + \cdots + \overset{h=k-1}{\frac{1}{1000} x_1(k-1)}$$

$$= x_2(0) + \frac{1}{1000} \sum_{h=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^h x_1(0)$$

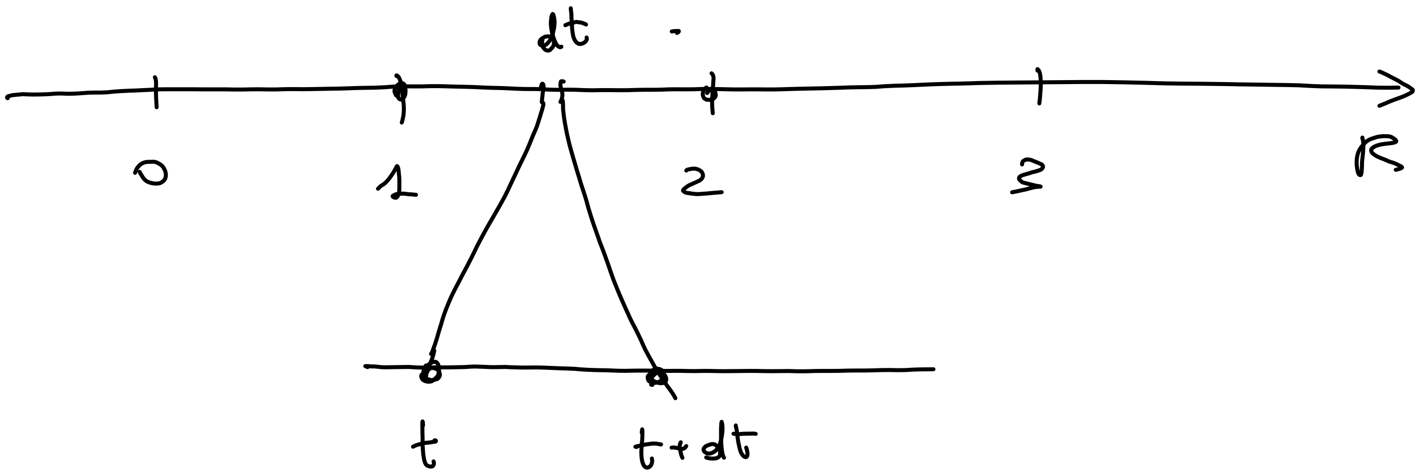
$$= x_2(0) + \cancel{\frac{1}{1000}} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^k}{\cancel{1 - \left(1 - \frac{1}{1000}\right)}}$$

$$\sum_{h=0}^{k-1} a^h = \frac{1-a^k}{1-a} \qquad a = \left(1-\frac{1}{1000}\right)$$



variabile indipendente

SISTEMA TD $\longleftrightarrow$ SISTEMA TC



$$x_1(t+dt) = x_1(t) - \alpha\, x_1(t)$$

$$\alpha = \frac{1}{1000}\, dt$$

$$x_2(t+dt) = x_2(t) + \alpha\, x_1(t)$$

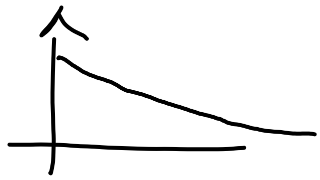
$$x_1(t+dt) - x_1(t) = -\frac{1}{1000}\, dt \; x_1(t)$$

$$\frac{x_1(t+dt) - x_1(t)}{dt} = -\frac{1}{1000}\, x_1(t)$$

$$dt \to 0$$ molto piccolo

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{1000}\, x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{1000}\, x_1(t) \end{aligned}}$$

$$\underline{x_1(t) = e^{-\frac{1}{1000}t}\, x_1(0)}$$



$$x^{20} + 37x^4 + 8x + 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$\boxed{x_1(n) = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^n x_1(0)}$$