Segnali e Sistemi

Tempo 2 ore e 30 minuti **Nessun documento ammesso**

Istruzioni. Il compito va eseguito sui fogli a quadretti forniti. Scrivere Cognome Nome e Matricola su ogni foglio da consegnare. Per ogni domanda, motivare la risposta e riportare tutti i calcoli ritenuti necessari. Quando si richiede di tracciare un segnale, bisogna individuarne il supporto e tracciarne in modo anche approssimativo l'andamento. Consegnare unicamente il compito, senza "brutta copia".

Per superare l'esame bisogna ottenere almeno 10 punti per i tre esercizi ed almeno 5 punti per le domande teoriche e Matlab.

Esercizio 1: Sistemi a tempo continuo, 7 punti

Sia $h(t) = \frac{1}{T}\Lambda\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$ la risposta impulsiva di un sistema $\mathcal{S}$ LTI a tempo continuo, con $t_0 \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}_0^+$ e $\Lambda(t) = (1-|t|)\ \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ (impulso triangolare).

1. Tracciare l'andamento di h e discutere la stabilità e la causalità del sistema $\mathcal{S}$ in funzione dei parametri.
2. Determinare la risposta in ampiezza $A(\omega) = |H(\omega)|$ del sistema e tracciarne lo schizzo.
   Suggerimento. Utilizzare la notazione $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Partire dal calcolo della TFtc di $\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$.
3. Calcolare la banda passante B del sistema, definita, in questo caso particolare, come l'intervallo di pulsazioni corrispondenti al lobo principale di $A(\omega)$, cioè l'intervallo tra gli zeri di A a modulo minimo.
4. Sia $\mathcal{S}_1$ ora sistema con risposta impulsiva $h_1(t) = 2\cos(\omega_1 t)\cdot h(t)$, con $\omega_1 \gg \omega_0$. Si discuta stabilità e causalità di $\mathcal{S}_1$. Se ne tracci la risposta in ampiezza $A_1(\omega)$, partendo dal calcolo di H_1 in termini di H e, nel passare al modulo, utilizzando l'approssimazione $A(\omega) \approx 0$ quando ω non è nel lobo principale.
5. In ingresso al sistema $\mathcal{S}_1$ è posto il segnale $x(t) = \cos(\omega_A t + \phi_A) + \cos[(\omega_A + \Delta\omega)t + \phi_B]$ con $\omega_A \in \mathbb{R}_0^+$, $\Delta\omega \in \mathbb{R}_0^+$, $\phi_A \in (-\pi, \pi)$, $\phi_B \in (-\pi, \pi)$. Sia $y(t)$ l'uscita corrispondente. Determinare in quali condizioni y è una sinusoide a pulsazione ω_A ed ampiezza unitaria, sempre con l'approssimazione di cui al punto precedente.
   Suggerimento. Si cominci dall'individuare la banda passante di $\mathcal{S}_1$.

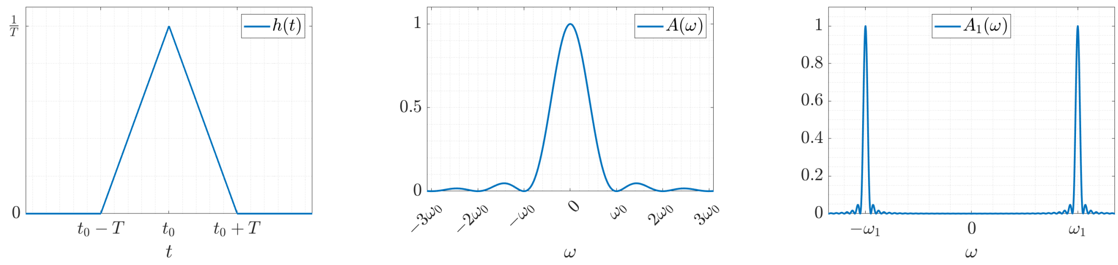
Soluzione dell'esercizio 1

1. Il segnale $h(t)$ è un impulso triangolare centrato in t_0 e di ampiezza $2T$, vedere Fig. 1(a). Il suo supporto è quindi $(t_0 - T, t_0 + T)$. Il sistema $\mathcal{S}$ è dunque causale se $t_0 - T > 0$, cioè $t_0 > T$, anticausale se $t_0 + T < 0$, cioè $t_0 < -T$ e non causale se $-T < t_0 < T$.

   Inoltre l'area sottesa dal grafico di $h(t)$ è sempre pari a $\frac{1}{2}\frac{1}{T}\cdot 2T = 1$ indipendentemente da t_0 e T. Quindi il sistema resta sempre stabile.

2. La TFtc di $\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$ è:
$$\mathcal{F}\left[\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\right](\omega) = T\mathrm{sinc}^2\left(T\frac{\omega}{2\pi}\right) = T\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$
   Applicare un ritardo significa moltiplicare la TFtc per un esponenziale immaginario puro, che non ne altera il modulo. Infine bisogna considerare il fattore $\frac{1}{T}$ Allora
$$A(\omega) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$
   L'andamento del segnale è in Fig. 1(b). La risposta un ampiezza ha un lobo principale centrato in 0 e zeri in $\omega = k\omega_0, \forall k \in \mathbb{Z}_0$.

3. Gli zeri a minimo modulo di A sono $\pm\omega_0$, quindi la banda passante è l'intervallo $(-\omega_0, \omega_0)$.



(a) (b) (c)

Figura 1: Andamento di $h(t)$ (a), $A(\omega)$ (b) e $A_1(\omega)$ (c).

4. La causalità e la stabilità sono le stesse di $\mathcal{S}$. Infatti h_1 è semplicemente h moltipicata per un coseno. Questo non ne altera il supporto (quindi la causalità del sistema) né l'assoluta integrabilità (quindi la stabilità del sistema).

   Per tracciare l'andamento di $A_1(\omega)$, si osservi che, per la proprietà di modulazione,

$$H_1(\omega) = H(\omega - \omega_1) + H(\omega + \omega_1)$$

   da cui

$$A_1(\omega) = |H(\omega - \omega_1) + H(\omega + \omega_1)|$$

   Questa espressione è difficile da semplificare in generale, perché il modulo di una somma non è uguale alla somma dei moduli. Tuttavia, per l'approssimazione suggerita, se $\omega > 0$, $H(\omega + \omega_1)$ è trascurabile perché il suo argomento è $\omega + \omega_1 > \omega_1 \gg \omega_0$ al di fuori del lobo principale. Similmente, se $\omega < 0$, il contributo di $H(\omega - \omega_1)$ è trascurabile. Allora,

$$H_1(\omega) = H(\omega - \omega_1) + H(\omega + \omega_1) \approx \begin{cases} H(\omega - \omega_1) & \text{se } \omega > 0 \\ H(\omega + \omega_1) & \text{se } \omega < 0 \end{cases}$$

$$A_1(\omega) = |H_1(\omega)| \approx \begin{cases} |H(\omega - \omega_1)| = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega-\omega_1}{\omega_0}\right) & \text{se } \omega > 0 \\ |H(\omega + \omega_1)| = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega+\omega_1}{\omega_0}\right) & \text{se } \omega < 0 \end{cases}$$

   L'andamento della funzione è mostrato in Fig. 1(c).

5. La banda passante del nuovo sistema è $(-\omega_1 - \omega_0, -\omega_1 + \omega_0) \cup (\omega_1 - \omega_0, \omega_1 + \omega_0)$. Affinché $y(t)$ sia come desiderato, dobbiamo avere $A_1(\omega_A) = 1$ e $A_1(\omega_A + \Delta\omega) \approx 0$. Dal grafico di A_1 si ricava immediatamente che $\omega_A = \omega_1$ e $\Delta\omega \geq \omega_0$.

Esercizio 2: Trasformate di Fourier e campionamento, 7 punti

Siano $v(t) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)$, $w(t) = \cos(\omega_1 t + \phi)$ e $x(t) = v(t) + w(t)$ dove $u(t)$ è il gradino unitario, $T > 0$, $\omega_1 = 3\frac{2\pi}{T}$, $\phi \in (-\pi, \pi)$.

1. Calcolare energia e potenza su $\mathbb{R}$ di v e w. Dedurne che x è un segnale di potenza (la sua energia è infinita).
2. Calcolare e tracciare la trasformata di Fourier di $x(t)$. **Suggerimento.** Calcolare le TFtc di v e w ed usare la linearità della TFtc.
3. È possibile ricostruire x a partire dai suoi campioni presi con un'opportuna frequenza di campionamento? Se sì, determinare il valore minimo di tale frequenza.

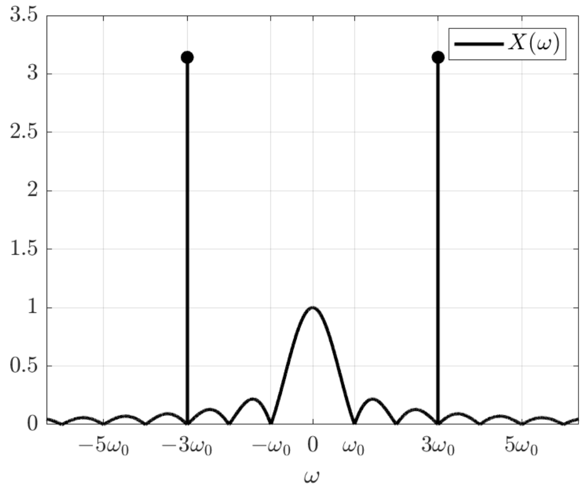


Figura 2: Esercizio 2. Andamento di $X(\omega)$. Si noti che $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ e $\omega_1 = 3\omega_0$.

4. Sia $h(t) = \frac{3}{2T}\mathrm{sinc}\left(\frac{3}{2T}t\right)$ la risposta impulsiva di un sistema LTI. Sia $y(t) = h * x(t)$, la risposta del sistema all'ingresso x. È possibile ricostruire y a partire dai suoi campioni? Se sì, quale deve essere la minima frequenza di campionamento?

Soluzione dell'esercizio 2

1. Cominciamo con l'osservare che $v(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$. La sua energia è:

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt = T$$

   v è dunque un segnale di energia, e la sua potenza è quindi zero. Invece w è una sinusoide in forma canonica con ampiezza $A = 1$. La sua energia è infinita e la sua potenza è $A^2/2 = 1/2$.

   Infine x ha ovviamente energia infinita, in quanto coincide con w per ogni $|t| > T/2$, per cui

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt \geq \int_{\mathbb{R}-\left(\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)} |x(t)|^2 \, dt = \int_{\mathbb{R}-\left(\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)} |w(t)|^2 \, dt = +\infty$$

2. Per la linearità della TFtc, si ha:

$$\begin{aligned}
V(\omega) &= T\mathrm{sinc}\left(T\frac{\omega}{2\pi}\right) \\
w(t) &= \cos(\omega_1 t + \phi) = \frac{1}{2}e^{j(\omega t+\phi)} + \frac{1}{2}e^{-j(\omega t+\phi)} = \frac{1}{2}e^{j\omega t}e^{j\phi} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}e^{-j\phi} \\
W(\omega) &= \pi\delta(\omega-\omega_1)e^{j\phi} + \pi\delta(\omega+\omega_1)e^{-j\phi} \\
X(\omega) &= T\mathrm{sinc}\left(T\frac{\omega}{2\pi}\right) + \pi\left[\delta(\omega-\omega_1)e^{j\phi} + \delta(\omega+\omega_1)e^{-j\phi}\right] \\
&= T\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + \pi\left[\delta(\omega-3\omega_0)e^{j\phi} + \delta(\omega+3\omega_0)e^{-j\phi}\right],
\end{aligned}$$

   dove abbiamo posto $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ da cui $\omega_1 = 3\omega_0$. L'andamento del modulo di tale funzione è illustrato nella Fig. 2.

3. È impossibile ricostruire perfettamente x dai suoi campioni qualunque sia la frequenza di campionamento, perché la banda del segnale (cioè il supporto della sua TFtc) è infinita. Tale risposta è considerata sufficiente ai fini dell'esame. Si può comunque aggiungere che, nella pratica, è possibile considerare che $|X(\omega)|$ diventi trascurabile per ω sufficientemente grande, cioè per ω superiore ad un opportuno ω_T. In tal

caso, si può campionare x con periodo non superiore a $\frac{\pi}{\omega_T}$, accettando un certo errore di ricostruzione. Il valore di soglia ω_T dipende dal massimo errore di ricostruzione che si può accettare, ma affrontare questo problema va al di là degli obiettivi di questo esercizio d'esame ed anche degli obiettivi del corso.

4. Si trova $H(\omega) = \frac{3}{2T}\frac{2T}{3}\mathrm{rect}\left(\frac{2T}{3}\frac{\omega}{2\pi}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\frac{3}{2}\omega_0}\right)$.

   Quindi $H(\omega)$ è la risposta in frequenza di un filtro passabasso ideale che seleziona l'intervallo di pulsazioni $\left(-\frac{3}{4}\omega_0, \frac{3}{4}\omega_0\right)$, corrispondente alle frequenze $\left(-\frac{3}{4}\frac{\omega_0}{2\pi}, \frac{3}{4}\frac{\omega_0}{2\pi}\right) = \left(-\frac{3}{4}\frac{1}{T}, \frac{3}{4}\frac{1}{T}\right)$. Possiamo chiamare $f_{\mathrm{cut}} = \frac{3}{4T}$ la "frequenza di taglio" del filtro passabasso. Ne segue che il segnale y ha banda limitata, corrispondente a tale intervallo. Esso può dunque essere ricostruito dai suoi campioni e la frequenza di campionamento F_C deve soddisfare $F_C \geq 2f_{\mathrm{cut}} = 2\frac{3}{4T} = \frac{3}{2T}$.

   In effetti, lo schema risultante è quello tipico di un sistema di conversione A/D: filtro passa-basso seguito da un campionamento a frequenza almeno doppia della frequenza di taglio del filtro.

Esercizio 3: EDOLCC, 7 punti

Si consideri l'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti costanti:

$$y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = x(t). \tag{1}$$

1. Determinare $\mathcal{Y}_O$, lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'omogenea associata.
2. Sia $\mathcal{S}$ il sistema LTI causale associato all'equazione (1): determinarne la funzione di trasferimento e dire se è BIBO stabile.
3. Determinare la risposta impulsiva di $\mathcal{S}$.
4. Determinare per quale ingresso il sistema $\mathcal{S}$ produce l'uscita $y(t) = \sin(3t)u(t)$. A tal proposito si ricordino le seguenti trasformate di Laplace valide $\forall\omega \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\, u(t)\right](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \mathrm{ROC} = \{s : \Re(s) > 0\}$$
$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\, u(t)\right](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \mathrm{ROC} = \{s : \Re(s) > 0\}$$

Soluzione dell'esercizio 3

1. Determiniamo le radici del polinomio caratteristico:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2}.$$

   Quindi $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -4$. Lo spazio delle soluzioni dell'omogenea associata è allora: $\mathcal{Y}_O = \mathrm{span}\left\{e^{-3t}, e^{-4t}\right\}$. Equivalentemente, il generico elemento di $\mathcal{Y}_O$ è $y(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{-4t}$.

   Entrambe le formulazioni della risposta (con lo span o con l'espressione di y) sono considerate corrette.

2. Ricordiamo che la funzione di trasferimento di un sistema associato ad un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è una funzione razionale, per la quale i coefficienti dei polinomi a numeratore e denominatore sono i coefficienti dell'equazione differenziale:

$$H(s) = \frac{1}{s^2+7s+12}$$

   Per giudicare la stabilità del sistema, si osserva che il grado del denominatore della funzione di trasferimento è strettamente maggiore di quello del numeratore e che i poli di $H(s)$ sono proprio le radici del polinomio caratteristico -3 e -4: entrambe hanno parte reale negativa e quindi il sistema è BIBO stabile.

3. La risposta impulsiva del sistema si ottiene calcolando la TL inversa di $H(s)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+4)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+4} \\
A &= (s+3)H(s)|_{s=-3} = \frac{1}{-3+4} = 1 \\
B &= (s+4)H(s)|_{s=-4} = \frac{1}{-4+3} = -1 \\
h(t) &= u(t)\left[Ae^{-3t} + Be^{-4t}\right] = u(t)\left[e^{-3t} - e^{-4t}\right]
\end{aligned}$$

4. Tutti i segnali coinvolti sono causali e quindi le ROC delle rispettive TL sono dei semipiani destri In questo caso abbiamo $Y(s) = \frac{3}{s^2+9} \forall s : \Re(s) > 0$ e quindi:

$$\begin{aligned}
\forall s : \Re(s) > 0, \qquad\qquad Y(s) &= H(s)X(s) \\
\frac{3}{s^2+9} &= \frac{1}{(s+3)(s+4)}X(s) \\
X(s) &= \frac{3(s+3)(s+4)}{s^2+9} = \frac{3s^2+21s+36}{s^2+9} = \frac{3(s^2+9)+21s+9}{s^2+9} \\
&= 3 + 21\frac{s}{s^2+9} + 3\frac{3}{s^2+9}
\end{aligned}$$

e quindi:

$$x(t) = 3\delta(t) + 21\cos(3t)u(t) + 3\sin(3t)u(t)$$

Nota 1. Per calcolare la TL inversa di $X(s)$ abbiamo dovuto effettuare la divisione tra polinomi, perché il grado del numeratore è uguale a quello del denominatore. Per fare ciò, in questo caso, è bastato far apparire al numeratore un multiplo denominatore, e calcolare il resto di conseguenza.

Nota. Allo stessa espressione di x si può arrivare anche applicando direttamente l'EDOLCC, visto che $x(t) = y''(t) + 7y'(t) + 12y(t)$. Avremmo avuto quindi:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \sin(3t)u(t) \\
y'(t) &= 3\cos(3t)u(t) + \delta(t)\sin(3t) = 3\cos(3t)u(t) \\
y''(t) &= -9\sin(3t) + 3\delta(t)\cos(3t) = -9\sin(3t) + 3\delta(t) \\
x(t) &= y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = -9\sin(3t) + 3\delta(t) + 21\cos(3t)u(t) + 12\sin(3t)u(t) \\
&= 3\delta(t) + 21\cos(3t)u(t) + 3\sin(3t)u(t)
\end{aligned}$$

Domanda teorica 1 : Serie di Fourier, 4 punti

Ricordare le formule di analisi e sintesi della serie di Fourier.

Siano a_k i coefficienti di Fourier di un segnale x periodico di periodo T. Sia y il segnale prodotto da un sistema LTI BIBO stabile quando l'ingresso è x.

Esprimere i coefficienti di Fourier b_k del segnale y in funzione dei coefficienti a_k, della risposta in frequenza del sistema, e del periodo T.

Soluzione dell'esercizio

Le formule di analisi e sintesi per un segnale $x(t)$ periodico di periodo T sono:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt \qquad\qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

Le formule di analisi e sintesi possono essere scritte in modo equivalente usando l'abbreviazione $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Detta $H(\omega)$ la risposta in frequenza del sistema $\mathcal{S}$ in oggetto (tale segnale è ben definito perché il sistema è stabile), si ha:

$$y(t) = \mathcal{S}[x(t)] = \mathcal{S}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \mathcal{S}\left[e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H\left(jk\frac{2\pi}{T}\right) e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

$$b_k = a_k H\left(jk\frac{2\pi}{T}\right)$$

Nei calcoli abbiamo sfruttato la linearità del sistema e la proprietà della risposta in frequenza

Domanda teorica 2 : TFtd e TFD, 4 punti

Mostrare che utilizzando la Trasformata di Fourier Discreta e lo *zero-padding* è possibile ottenere un campionamento della TFtd di un segnale $x(n)$ a supporto finito in $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ con risoluzione arbitrariamente fine.

Soluzione dell'esercizio

Sia $x(n)$ un segnale t.d. a supporto in $\{0, 1, \ldots, N-1\}$. La sua TFtd, indicata con $X(\omega)$ è:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

dove abbiamo applicato prima la definizione di TFtd e poi il fatto che x ha supporto finito.

Sia ora $M \in \mathbb{Z}, M > N$. Definiamo un nuovo segnale $z(n)$:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, z(n) = x(n \mod M)$$

dove $\mod$ è l'operatore modulo, cioè il resto della divisione intera per M. In altre parole, z è la replica periodica di periodo M dei valori di x tra 0 e $M-1$. Calcoliamo allora la TFD di z, indicata con $Z(k)$ per ogni k intero:

$$Z(k) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} z(n)e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} = \frac{1}{M}\left. X(\omega)\right|_{\omega=k\frac{2\pi}{M}}$$

Quindi, calcolando la TFD di z, si ottengono (a meno di un ininfluente fattore di scala $\frac{1}{M}$) i valori di $X(\omega)$ campionati a passo $\frac{2\pi}{M}$. Siccome M si può scegliere in principio arbitrariamente grande, possiamo conoscere i valori di $X(\omega)$ con una risoluzione arbitrariamente fine. In pratica, M è limitato dalla precisione dell'architettura in cui il calcolo è eseguito, ma tipicamente è possibile utilizzare valori di M sufficientemente grandi per valutare $X(\omega)$ con ottima risoluzione.

Domanda di Matlab : Rappresentazione di segnali, 3 punti

Si consideri il segnale $x(t) = A\cos(\omega t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-T}{2T}\right)$. Scrivere uno script Matlab che:

1. Calcoli $x(t)$ nell'intervallo $(-2, 30)$ campionato a passo $\Delta = 10^{-3}$, con $A = 2$, $T = 10$, $\omega = 3$
2. Tracci in una figura l'andamento di $x(t)$ nel suddetto intervallo.
3. Tracci in una figura, usando la FFT, l'andamento del modulo della TFtc di x solo per **frequenze** positive. È importante identificare correttamente la scala delle frequenze. Per il calcolo della FFT, usare un opportuno zero-padding.

Soluzione dell'esercizio

Una possibile implementazione dello script è la seguente:

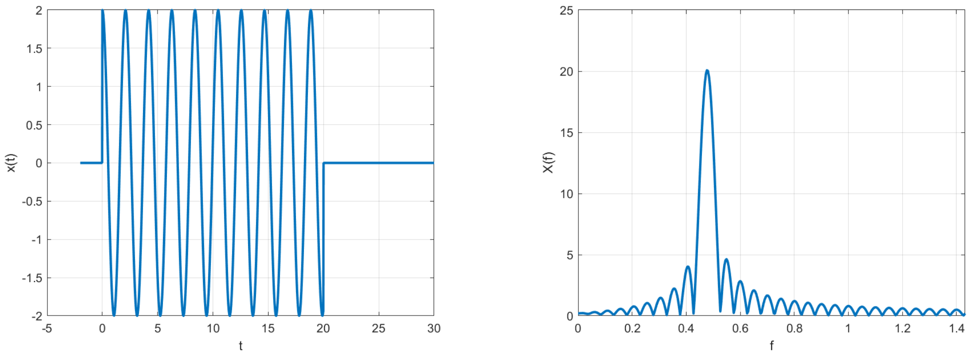


Figura 3: I grafici prodotti dallo script

```
%%  4.1
rect = @(t) abs(t)<1/2;
Delta = 1e-3;
t = -2:Delta:30;
A=2; T=10; omega = 3;
x= A*cos(omega*t).*rect((t-T)/(2*T));

%%  4.2
figure(1);
h=plot(t,x,'LineWidth',2);
grid; xlabel('t'); ylabel('x(t)')

%%  4.3
M=2^(3+nextpow2(numel(t)));
X = Delta*(abs(fft(x,M)));
figure(2);
FC=1/Delta;
step = FC/M;
freq = 0:step:FC/2;
plot(freq,X(1:M/2+1),'LineWidth',2);
grid;xlabel('f'); ylabel('X(f)')
xlim([0 3*omega/(2*pi) ]);
```

Si noti che l'ultimo comando (che non era comunque richiesto) permette di visualizzare le frequenze tra 0 e $3f_0$, dove $f_0 = \frac{\omega}{2\pi}$ è la frequenza della sinusoide.