ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.02.2025

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|x-2|^{\frac{2}{3}}}{x}$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento: (a) : Il dominio é dato da D=$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 0\}$. Il segno é determinato dal segno del denominatore e quindi $f(x) \geq 0$ per $x > 0$. É anche immediato vedere che la funzione si annulla in $x = 2$. La funzione é continua nel suo dominio perché composta da funzioni continue. Non ci sono simmetrie evidenti.

(b) Vediamo i limiti notevoli. Poiché per $x \to \infty$ l'ordine di infinito del numeratore é minore di quello del denominatore otteniamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty f(x)=0}$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$$

Quindi $x = 0$ é asintoto verticale, mentre $y = 0$ é asintoto orizzontale completo. La funzione non é quindi limitata ne inferiormente ne superiormente.

(c) La funzione é derivabile nel suo dominio ad eccezione del punto $x = 2$ (per la prsenza del valore assoluto e dell'esponente < 1). Per $x \in \frac{D}{\{2\}}$ otteniamo

$$f'(x) = \frac{x\frac{2}{3}|x-2|^{-\frac{1}{3}}\text{segno}(x-2) - |x-2|^{\frac{2}{3}}}{x^2} = \frac{\frac{2}{3}x\text{segno(x-2)} - |x-2|}{x^2|x-2|^{\frac{1}{3}}}$$
$$= \text{segno(x}-2)\frac{\frac{2}{3}x - x + 2}{x^2|x-2|^{\frac{1}{3}}} = \text{segno(x}-2)\frac{-\frac{1}{3}x+2}{x^2|x-2|^{\frac{1}{3}}}$$

Vediamo subito attacchi di f' nel punto 2. Da un attento controllo dei segni si ottiene:

$$\lim_{x\to 2^\pm} f'(x) = \pm\infty$$

Quindi $x = 2$ é una cuspide e punto di minimo relativo. Lo studio del segno non presenta particolari problemi. Per $x > 6$, $f'(x) < 0$ e quindi la funzione é strettamente monotona decrescente. Per $x \in (2, 6)$ $f'(x) > 0$ quindi f S.M.C.. Infine per $x < 2$ abbiamo $f'(x) < 0$ e quindi la funzione é strettamente monotona decrescente. Il punto $x = 6$ é quindi un punto di max relativo stretto. Come giá detto la funzione non é limitata ne inferiormente ne superiormente.

(d) Il grafico della funzione segue:

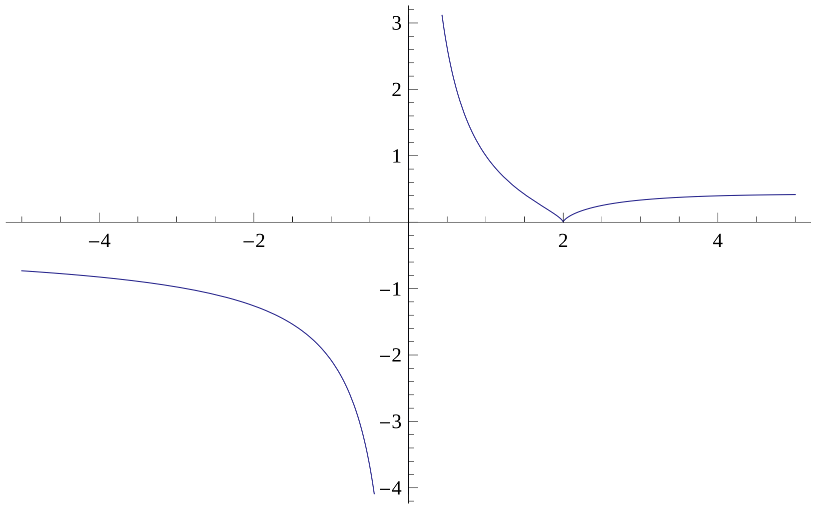

Figure 1: abbozzo del grafico della funzione dell'esercizio 1.

Esercizio 2 (punti 8) Studiare, per $b \in \mathbb{R}$, la convergenza semplice e assoluta di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{\sqrt{k}}.$$

Svolgimento: Studiamo prima la convergenza assoluta applicando il criterio del rapporto:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to infty} \frac{|b^{k+1}|}{|b|^k} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} = |b|$$

Quindi per $|b| < 1$ abbiamo convergenza assoluta (e quindi semplice). Per $|b| > 1$ la seri NON converge. Rimangono i casi dubbi $b = \pm 1$. Per $b = -1$, applicando criterio di Leibnitz si vede facilmante che la serie converge semplicemente (ma non assolutamente, serie armonica generalizzata con esponente < 1) , per $b = 1$ la serie diverge a $+\infty$ (serie armonica generalizzata con esponente < 1).

, **Esercizio 3 (punti 8)** Sia $f_\alpha(x) = \dfrac{(x - \sin x)^\alpha}{(x+6)\sqrt{x+2}}$.

i) Calcolare $\int_0^1 f_0(x)\,dx$. [*Suggerimento:* Usare una sostituzione.]

Svolgimento: L'integrale da calcolare diventa:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+6)\sqrt{x+2}}\,dx$$

Poniamo $\sqrt{x+2} = t$ abbiamo: $\frac{dx}{\sqrt{x+2}} = 2dt$ e $x + 6 = t^2 + 4$. Sostituendo l'integrale diventa:

$$2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 1} = \left(\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ii) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Il punto pericoloso é lo 0. Usando lo sviluppo di Mac-Laurin di $\sin x$ in un intorno destro di 0 otteniamo $x - \sin x = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, quindi la funzione integranda é asintotica a $\frac{1}{6^{1+\alpha}\sqrt{2}x^{-3\alpha}}$ per $x \to 0^+$. Si ha quindi convergenza per $-3\alpha < 1$ cioé per $\alpha > -\frac{1}{3}$.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' - 2y' + y = e^{2t}.$$

i) Determinare l'integrale generale.

Svolgimento: L'equazione algebrica associata é $z^2 - 2z + 1 = 0$ che ha la soluzione $z = 1$ con molteplicitá 2. Qundi la soluzione generale dell'omogenea é:

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 t \mathrm{e}^t$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti qualsiasi.

Per trovare la soluzione particolare proviamo con una funzione del tipo $\mathrm{A}\mathrm{e}^{2t}$ dove A é una costante da determinare. Abbiamo $y' = 2A\mathrm{e}^{2t}$ e $y'' = 4A\mathrm{e}^{2t}$. Sostituendo nell'equazione differenziale completa otteniamo:

$$4A\mathrm{e}^{2t} - 4A\mathrm{e}^{2t} + A\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{2t}$$

da cui si ottiene $A = 1$. Quindi la soluzione generale dell'equazione differenziale completa é:

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2 t\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t}$$

ii) Determinare una soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Svolgimento: Per trovare la soluzione del problema di Cauchy detrminiamo le costanti c_1 e c_2 dalle condizioni iniziali.Per la condizione $y(0) = 1$ otteniamo $c_1 + 1 = 1$ cioé $c_1 = 0$, dalla condizione $y'(0) = 0$ otteniamo $c_2 + 2 = 0$ cioé $c_2 = -2$. La soluzione del problema di Cauchy é allora:

$$y(t) = \mathrm{e}^{2t} - 2t\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t\left(\mathrm{e}^t - 2t\right)$$

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA ≤ 23/24) Determinare in forma esponenziale/trigonometrica tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = \overline{z}^2$. [*Suggerimento:* Usare la forma esponenziale di un numero complesso.]

Svolgimento: Usando la forma esponenziale del numero complesso $z = \rho\mathrm{e}^{i\varphi}$ l'equazione diventa $\rho^3\mathrm{e}^{3i\varphi} = \rho^2\mathrm{e}^{-2i\varphi}$, da cui otteniamo $z = 0$ (con moltplicitá 2) e le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} &\rho = 1 \\ &3\varphi = -2\varphi + 2k\pi \end{aligned}$$

Perció $\varphi = \frac{2k\pi}{5}$ dove $k = 0, \ldots 4$. Le soluzioni complesse non nulle in forma esponenziale sono quindi:

$$z_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}} \qquad \text{con} \quad k = 0, \ldots, 4$$

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.02.2025

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|x+2|^{\frac{2}{3}}}{x}$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento: (a) : Il dominio é dato da D=$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 0\}$. Il segno é determinato dal segno del denominatore e quindi $f(x) \geq 0$ per $x > 0$. É anche immediato vedere che la funzione si annulla in $x = -2$. La funzione é continua nel suo dominio perché composta da funzioni continue. Non ci sono simmetrie evidenti.

(b) Vediamo i limiti notevoli. Poiché per $x \to \infty$ l'ordine di infinito del numeratore é minore di quello del denominatore otteniamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty f(x)=0}$$

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

Quindi $x = 0$ é asintoto verticale, mentre $y = 0$ é asintoto orizzontale completo. La funzione non é quindi limitata ne inferiormente ne superiormente.

(c) La funzione é derivabile nel suo dominio ad eccezione del punto $x = -2$ (per la presenza del valore assoluto e dell'esponente < 1). Per $x \in \frac{D}{\{-2\}}$ otteniamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x\frac{2}{3}|x+2|^{-\frac{1}{3}}\text{segno}(x+2)-|x+2|^{\frac{2}{3}}}{x^2} = \frac{\frac{2}{3}x\text{segno(x+2)}-|x+2|}{x^2|x+2|^{\frac{1}{3}}} \\ &= \text{segno}(\text{x}+2)\frac{\frac{2}{3}x-x-2}{x^2|x+2|^{\frac{1}{3}}} = \text{segno}(\text{x}+2)\frac{-\frac{1}{3}x-2}{x^2|x+2|^{\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

Vediamo subito attacchi di f' nel punto -2. Da un attento controllo dei segni si ottiene:

$$\lim_{x\to -2^{\pm}} f'(x) = \mp\infty$$

Quindi $x = -2$ é una cuspide e punto di massimo relativo. Lo studio del segno non presenta particolari problemi. Per $x < -6$, $f'(x) < 0$ e quindi la funzione é strettamente monotona decrescente. Per $x \in (-6, -2)$ $f'(x) > 0$ quindi f S.M.C.. Infine per $x > -2$ abbiamo $f'(x) < 0$ e quindi la funzione é strettamente monotona decrescente. Il punto $x = -6$ é quindi un punto di min relativo stretto. Come giá detto la funzione non é limitata ne inferiormente ne superiormente.

(d) Il grafico della funzione segue:

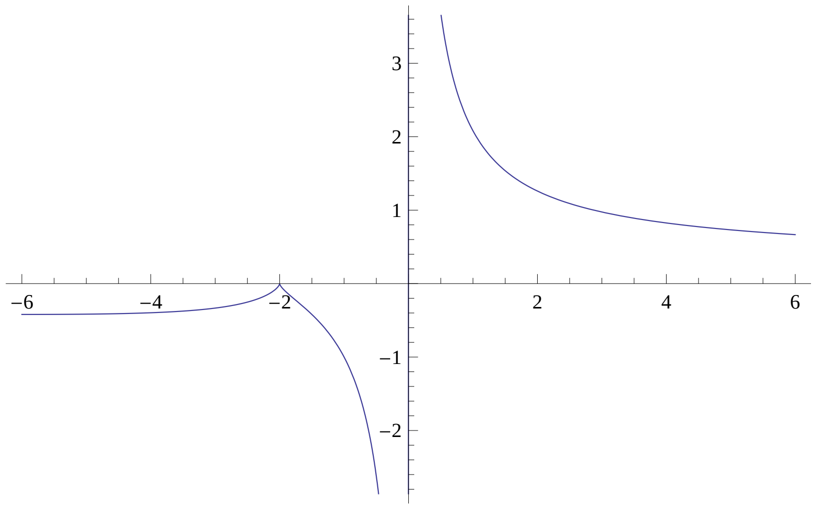

Figure 2: abbozzo del grafico della funzione dell'esercizio 2.

Esercizio 2 (punti 8) Studiare, per $b \in \mathbb{R}$, la convergenza semplice e assoluta di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{\sqrt[3]{k}}.$$

Svolgimento: Studiamo prima la convergenza assoluta applicando il criterio del rapporto:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to infty} \frac{|b^{k+1}|}{|b|^k} \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k+1}} = |b|$$

Quindi per $|b| < 1$ abbiamo convergenza assoluta (e quindi semplice). Per $|b| > 1$ la seri NON converge. Rimangono i casi dubbi $b = \pm 1$. Per $b = -1$, applicando criterio di Leibnitz si vede facilmante che la serie converge semplicemente (ma non assolutamente, serie armonica generalizzata con esponente < 1) , per $b = 1$ la serie diverge a $+\infty$ (serie armonica generalizzata con esponente < 1).

, **Esercizio 3 (punti 8)** Sia $f_\alpha(x) = \dfrac{(x - \sin x)^\alpha}{(x+8)\sqrt{x+4}}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\, dx$. [*Suggerimento:* Usare una sostituzione.]

Svolgimento: L'integrale da calcolare diventa:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+8)\sqrt{x+4}}\, dx$$

Poniamo $\sqrt{x+4} = t$ abbiamo: $\frac{dx}{\sqrt{x+4}} = 2dt$ e $x + 8 = t^2 + 4$. Sostituendo l'integrale diventa:

$$2\int_2^{\sqrt{5}} \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{5}} \frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 1} = \left(\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right|_2^{\sqrt{5}} = \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{\pi}{4}$$

ii) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Il punto pericoloso é lo 0. Usando lo sviluppo di Mac-Laurin di $\sin x$ in un intorno destro di 0 otteniamo $x - \sin x = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, quindi la funzione integranda é asintotica a $\frac{1}{6^\alpha 16 x^{-3\alpha}}$ per $x \to 0^+$. Si ha quindi convergenza per $-3\alpha < 1$ cioé per $\alpha > -\frac{1}{3}$.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' + 2y' + y = e^{2t}.$$

i) Determinare l'integrale generale.

Svolgimento: L'equazione algebrica associata é $z^2 + 2z + 1 = 0$ che ha la soluzione $z = -1$ con molteplicitá 2. Qundi la soluzione generale dell'omogenea é:

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 t\mathrm{e}^{-t}$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti qualsiasi.

Per trovare la soluzione particolare proviamo con una funzione del tipo Ae^{2t} dove A é una costante da determinare. Abbiamo $y' = 2A\mathrm{e}^{2t}$ e $y'' = 4A\mathrm{e}^{2t}$. Sostituendo nell'equazione differenziale completa otteniamo:

$$4A\mathrm{e}^{2t} + 4A\mathrm{e}^{2t} + A\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{2t}$$

da cui si ottiene $A = \frac{1}{9}$. Quindi la soluzione generale dell'equazione differenziale completa é:

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 t\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{2t}$$

ii) Determinare una soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Svolgimento: Per trovare la soluzione del problema di Cauchy determiniamo le costanti c_1 e c_2 dalle condizioni iniziali.Per la condizione $y(0) = 1$ otteniamo $c_1 + \frac{1}{9} = 1$ cioé $c_1 = \frac{8}{9}$ dalla condizione $y'(0) = 0$ otteniamo $-\frac{8}{9} + c_2 + \frac{2}{9} = 0$ cioé $c_2 = \frac{2}{3}$. La soluzione del problema di Cauchy é allora:

$$y(t) = \frac{8}{9}\mathrm{e}^{-t} + \frac{2}{3}t\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{2t}$$

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Determinare in forma esponenziale/trigonometrica tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = \overline{z}^2$. [*Suggerimento:* Usare la forma esponenziale di un numero complesso.]

Svolgimento: Usando la forma esponenziale del numero complesso $z = \rho \mathrm{e}^{i\varphi}$ l'equazione diventa $\rho^3 \mathrm{e}^{3i\varphi} = \rho^2 \mathrm{e}^{-2i\varphi}$, da cui otteniamo $z = 0$ (con moltplicitá 2) e le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} &\rho = 1 \\ &3\varphi = -2\varphi + 2k\pi \end{aligned}$$

Perció $\varphi = \frac{2k\pi}{5}$ dove $k = 0, \ldots 4$. Le soluzioni complesse non nulle in forma esponenziale sono quindi:

$$z_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}} \qquad \text{con} \quad k = 0, \ldots, 4$$

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.02.2025

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|x+2|^{\frac{1}{3}}}{x}$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento: (a) : Il dominio é dato da D=$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 0\}$. Il segno é determinato dal segno del denominatore e quindi $f(x) \geq 0$ per $x > 0$. É anche immediato vedere che la funzione si annulla in $x = -2$. La funzione é continua nel suo dominio perché composta da funzioni continue. Non ci sono simmetrie evidenti.

(b) Vediamo i limiti notevoli. Poiché per $x \to \infty$ l'ordine di infinito del numeratore é minore di quello del denominatore otteniamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty f(x)=0}$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$$

Quindi $x = 0$ é asintoto verticale, mentre $y = 0$ é asintoto orizzontale completo. La funzione non é quindi limitata ne inferiormente ne superiormente.

(c) La funzione é derivabile nel suo dominio ad eccezione del punto $x = -2$ (per la presenza del valore assoluto e dell'esponente < 1). Per $x \in \frac{D}{\{-2\}}$ otteniamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x\frac{1}{3}|x+2|^{-\frac{2}{3}}\text{segno}(x+2) - |x+2|^{\frac{1}{3}}}{x^2} = \frac{\frac{1}{3}x\text{segno(x+2)} - |x+2|}{x^2|x+2|^{\frac{2}{3}}} \\ &= \text{segno(x + 2)}\frac{\frac{1}{3}x - x - 2}{x^2|x+2|^{\frac{2}{3}}} = \text{segno(x + 2)}\frac{-\frac{2}{3}x - 2}{x^2|x+2|^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

Vediamo subito attacchi di f' nel punto -2. Da un attento controllo dei segni si ottiene:

$$\lim_{x\to -2^\pm} f'(x) = \mp\infty$$

Quindi $x = -2$ é una cuspide e punto di massimo relativo. Lo studio del segno non presenta particolari problemi. Per $x < -3$, $f'(x) < 0$ e quindi la funzione é strettamente monotona decrescente. Per $x \in (-3, -2)$ $f'(x) > 0$ quindi f S.M.C.. Infine per $x > -2$ abbiamo $f'(x) < 0$ e quindi la funzione é strettamente monotona decrescente. Il punto $x = -3$ é quindi un punto di min relativo stretto. Come giá detto la funzione non é limitata ne inferiormente ne superiormente.

(d) Il grafico della funzione segue:

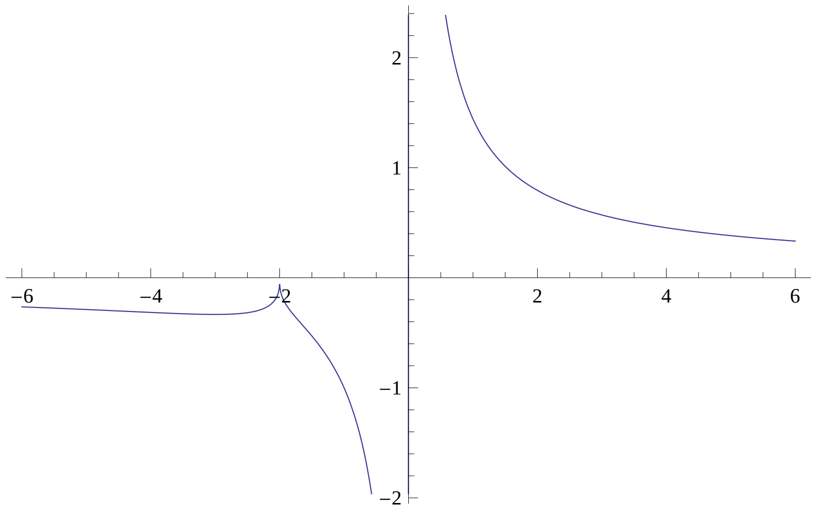

Figure 3: abbozzo del grafico della funzione dell'esercizio 3.

Esercizio 2 (punti 8) Studiare, per $b \in \mathbb{R}$, la convergenza semplice e assoluta di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k^{\frac{2}{3}}}.$$

Svolgimento: Studiamo prima la convergenza assoluta applicando il criterio del rapporto:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to infty} \frac{|b^{k+1}|}{|b|^k} \frac{k^{\frac{2}{3}}}{(k+1)^{\frac{2}{3}}} = |b|$$

Quindi per $|b| < 1$ abbiamo convergenza assoluta (e quindi semplice). Per $|b| > 1$ la seri NON converge. Rimangono i casi dubbi $b = \pm 1$. Per $b = -1$, applicando criterio di Leibnitz si vede facilmante che la serie converge semplicemente (ma non assolutamente, serie armonica generalizzata con esponente < 1) , per $b = 1$ la serie diverge a $+\infty$ (serie armonica generalizzata con esponente < 1).

, **Esercizio 3 (punti 8)** Sia $f_\alpha(x) = \dfrac{(1-\cos x)^\alpha}{(x+8)\sqrt{x+4}}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,dx$. [*Suggerimento:* Usare una sostituzione.]

Svolgimento: L'integrale da calcolare diventa:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+8)\sqrt{x+4}}\,dx$$

Poniamo $\sqrt{x+4} = t$ abbiamo: $\frac{dx}{\sqrt{x+4}} = 2dt$ e $x + 8 = t^2 + 4$. Sostituendo l'integrale diventa:

$$2\int_2^{\sqrt{5}} \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{5}} \frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1} = \left(\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right|_2^{\sqrt{5}} = \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{\pi}{4}$$

ii) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Il punto pericoloso é lo 0. Usando lo sviluppo di Mac-Laurin di $\cos x$ in un intorno destro di 0 otteniamo $1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, quindi la funzione integranda é asintotica a $\frac{1}{2^\alpha 16 x^{-2\alpha}}$ per $x \to 0^+$. Si ha quindi convergenza per $-2\alpha < 1$ cioé per $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' + 2y' + y = e^{-2t}.$$

i) Determinare l'integrale generale.

Svolgimento: L'equazione algebrica associata é $z^2 + 2z + 1 = 0$ che ha la soluzione $z = -1$ con molteplicitá 2. Qundi la soluzione generale dell'omogenea é:

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 t \mathrm{e}^{-t}$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti qualsiasi.

Per trovare la soluzione particolare proviamo con una funzione del tipo Ae^{-2t} dove A é una costante da determinare. Abbiamo $y' = -2A\mathrm{e}^{-2t}$ e $y'' = 4A\mathrm{e}^{-2t}$. Sostituendo nell'equazione differenziale completa otteniamo:

$$4A\mathrm{e}^{-2t} - 4A\mathrm{e}^{-2t} + A\mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{-2t}$$

da cui si ottiene $A = 1$. Quindi la soluzione generale dell'equazione differenziale completa é:

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 t \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t}$$

ii) Determinare una soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Svolgimento: Per trovare la soluzione del problema di Cauchy determiniamo le costanti c_1 e c_2 dalle condizioni iniziali.Per la condizione $y(0) = 1$ otteniamo $c_1 + 1 = 1$ cioé $c_1 = 0$ dalla condizione $y'(0) = 0$ otteniamo $c_2 - 2 = 0$ cioé $c_2 = 2$. La soluzione del problema di Cauchy é allora:

$$y(t) = 2t\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t}$$

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Determinare in forma esponenziale/trigonometrica tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = \overline{z}^2$. [*Suggerimento:* Usare la forma esponenziale di un numero complesso.]

Svolgimento: Usando la forma esponenziale del numero complesso $z = \rho\mathrm{e}^{i\varphi}$ l'equazione diventa $\rho^3\mathrm{e}^{3i\varphi} = \rho^2\mathrm{e}^{-2i\varphi}$, da cui otteniamo $z = 0$ (con moltplicitá 2) e le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} &\rho = 1 \\ &3\varphi = -2\varphi + 2k\pi \end{aligned}$$

Perció $\varphi = \frac{2k\pi}{5}$ dove $k = 0, \ldots 4$. Le soluzioni complesse non nulle in forma esponenziale sono quindi:

$$z_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}} \qquad \text{con} \quad k = 0, \ldots, 4$$

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.02.2025

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|x-2|^{\frac{1}{3}}}{x}$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento: (a) : Il dominio é dato da D=$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 0\}$. Il segno é determinato dal segno del denominatore e quindi $f(x) \geq 0$ per $x > 0$. É anche immediato vedere che la funzione si annulla in $x = 2$. La funzione é continua nel suo dominio perché composta da funzioni continue. Non ci sono simmetrie evidenti.

(b) Vediamo i limiti notevoli. Poiché per $x \to \infty$ l'ordine di infinito del numeratore é minore di quello del denominatore otteniamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty f(x)=0}$$

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

Quindi $x = 0$ é asintoto verticale, mentre $y = 0$ é asintoto orizzontale completo. La funzione non é quindi limitata ne inferiormente ne superiormente.

(c) La funzione é derivabile nel suo dominio ad eccezione del punto $x = 2$ (per la presenza del valore assoluto e dell'esponente < 1). Per $x \in \frac{D}{\{2\}}$ otteniamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x\frac{1}{3}|x-2|^{-\frac{2}{3}}\text{segno}(x-2)-|x-2|^{\frac{1}{3}}}{x^2} = \frac{\frac{1}{3}x\text{segno(x}-2)-|x-2|}{x^2|x-2|^{\frac{2}{3}}} \\ &= \text{segno(x} - 2)\frac{\frac{1}{3}x-x+2}{x^2|x-2|^{\frac{2}{3}}} = \text{segno(x} - 2)\frac{-\frac{2}{3}x+2}{x^2|x-2|^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

Vediamo subito attacchi di f' nel punto 2. Da un attento controllo dei segni si ottiene:

$$\lim_{x\to -2^{\pm}} f'(x) = \pm\infty$$

Quindi $x = 2$ é una cuspide e punto di minimo relativo. Lo studio del segno non presenta particolari problemi. Per $x < 2$, $f'(x) < 0$ e quindi la funzione é strettamente monotona decrescente. Per $x \in (2, 3)$ $f'(x) > 0$ quindi f S.M.C.. Infine per $x > 3$ abbiamo $f'(x) < 0$ e quindi la funzione é strettamente monotona decrescente. Il punto $x = 3$ é quindi un punto di max relativo stretto. Come giá detto la funzione non é limitata ne inferiormente ne superiormente.

(d) Il grafico della funzione segue:

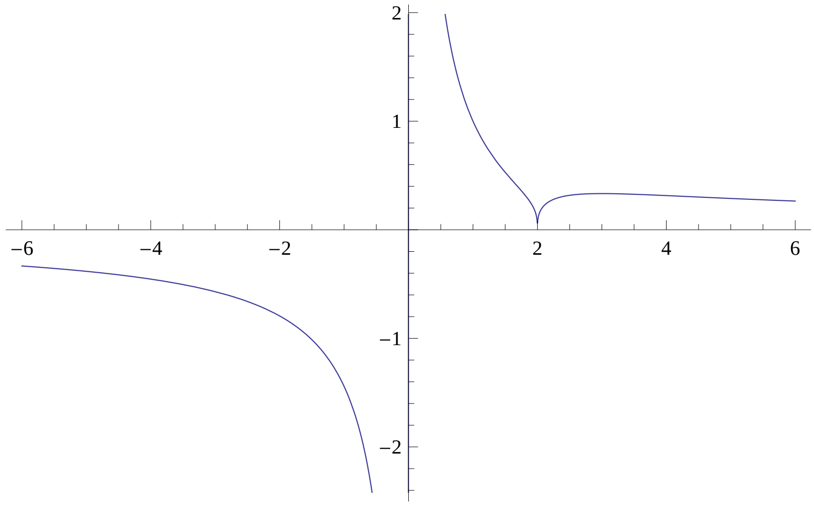

Figure 4: abbozzo del grafico della funzione dell'esercizio 4.

Esercizio 2 (punti 8) Studiare, per $b \in \mathbb{R}$, la convergenza semplice e assoluta di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k^{\frac{3}{4}}}.$$

Svolgimento: Studiamo prima la convergenza assoluta applicando il criterio del rapporto:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to infty} \frac{|b|^{k+1}}{|b|^k} \frac{k^{\frac{3}{4}}}{(k+1)^{\frac{3}{4}}} = |b|$$

Quindi per $|b| < 1$ abbiamo convergenza assoluta (e quindi semplice). Per $|b| > 1$ la seri NON converge. Rimangono i casi dubbi $b = \pm 1$. Per $b = -1$, applicando criterio di Leibnitz si vede facilmante che la serie converge semplicemente (ma non assolutamente, serie armonica generalizzata con esponente < 1) , per $b = 1$ la serie diverge a $+\infty$ (serie armonica generalizzata con esponente < 1).

, **Esercizio 3 (punti 8)** Sia $f_\alpha(x) = \dfrac{(1-\cos x)^\alpha}{(x+6)\sqrt{x+2}}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\, dx$. [*Suggerimento:* Usare una sostituzione.]

Svolgimento: L'integrale da calcolare diventa:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+6)\sqrt{x+2}}\, dx$$

Poniamo $\sqrt{x+2} = t$ abbiamo: $\frac{dx}{\sqrt{x+2}} = 2dt$ e $x + 6 = t^2 + 4$. Sostituendo l'integrale diventa:

$$2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1} = \left(\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ii) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Il punto pericoloso é lo 0. Usando lo sviluppo di Mac-Laurin di $\cos x$ in un intorno destro di 0 otteniamo $1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, quindi la funzione integranda é asintotica a $\frac{1}{2^{\alpha+\frac{1}{2}}6x^{-2\alpha}}$ per $x \to 0^+$. Si ha quindi convergenza per $-2\alpha < 1$ cioé per $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' - 2y' + y = e^{-2t}.$$

i) Determinare l'integrale generale.

Svolgimento: L'equazione algebrica associata é $z^2 - 2z + 1 = 0$ che ha la soluzione $z = 1$ con molteplicitá 2. Qundi la soluzione generale dell'omogenea é:

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2 t\mathrm{e}^t$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti qualsiasi.

Per trovare la soluzione particolare proviamo con una funzione del tipo Ae^{-2t} dove A é una costante da determinare. Abbiamo $y' = -2A\mathrm{e}^{-2t}$ e $y'' = 4A\mathrm{e}^{-2t}$. Sostituendo nell'equazione differenziale completa otteniamo:

$$4A\mathrm{e}^{-2t} + 4A\mathrm{e}^{-2t} + A\mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{-2t}$$

da cui si ottiene $A = \frac{1}{9}$. Quindi la soluzione generale dell'equazione differenziale completa é:

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2 t\mathrm{e}^t + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-2t}$$

ii) Determinare una soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Svolgimento: Per trovare la soluzione del problema di Cauchy determiniamo le costanti c_1 e c_2 dalle condizioni iniziali.Per la condizione $y(0) = 1$ otteniamo $c_1 + \frac{1}{9} = 1$ cioé $c_1 = \frac{8}{9}$ dalla condizione $y'(0) = 0$ otteniamo $\frac{8}{9} + c_2 - \frac{2}{9} = 0$ cioé $c_2 = -\frac{2}{3}$. La soluzione del problema di Cauchy é allora:

$$y(t) = \frac{8}{9}\mathrm{e}^t - \frac{2}{3}t\mathrm{e}^t + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-2t}$$

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Determinare in forma esponenziale/trigonometrica tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = \overline{z}^2$. [*Suggerimento:* Usare la forma esponenziale di un numero complesso.]

Svolgimento: Usando la forma esponenziale del numero complesso $z = \rho\mathrm{e}^{i\varphi}$ l'equazione diventa $\rho^3\mathrm{e}^{3i\varphi} = \rho^2\mathrm{e}^{-2i\varphi}$, da cui otteniamo $z = 0$ (con moltplicitá 2) e le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} &\rho = 1 \\ &3\varphi = -2\varphi + 2k\pi \end{aligned}$$

Perció $\varphi = \frac{2k\pi}{5}$ dove $k = 0, \dots 4$. Le soluzioni complesse non nulle in forma esponenziale sono quindi:

$$z_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}} \qquad \text{con} \quad k = 0, \dots, 4$$

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$