ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2023-2024

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

10 febbraio 2025

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

(a) Determinare il dominio, il segno, eventuali simmetrie o periodicità ;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f, studiare gli eventuale attacchi;

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Facoltativo: studiare la concavità e la convessità della funzione e gli eventuali flessi.

Soluzione

(a) La funzione ha dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, dato che arctan è definita per ogni valore del suo argomento e l'argomento è definito per ogni $x \neq 1$. Dato che il dominio non è simmetrico né periodico, la funzione non può avere ne' simmetrie ne' periodicità. Inoltre f è positiva quando $\frac{x}{x-1} > 0$ cioè per $x > 1$ e $x < 0$ e ha un solo zero, in $x = 0$.

(b) Calcolo i limiti significativi:

$$\lim_{x\to 1^+} \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) = \pi/2$$

perché $\frac{x}{x-1} \to +\infty$.

$$\lim_{x\to 1^-} \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\pi/2$$

perché $\frac{x}{x-1} \to -\infty$. Calcolo i limiti a $+\infty$ e a $-\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) = \arctan(1) = \pi/4$$

perché $\frac{x}{x-1} \to 1$,

$$\lim_{x\to -\infty} \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) = \arctan(1) = \pi/4$$

perché $\frac{x}{x-1} \to 1$, dunque la funzione ha un asintoto orizzontale in $y = \arctan(1) = \pi/4$ sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$

(c) La funzione è continua e derivabile nel suo dominio. Calcolo la derivata di f:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{x}{x-1})^2} \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2 + x^2}$$

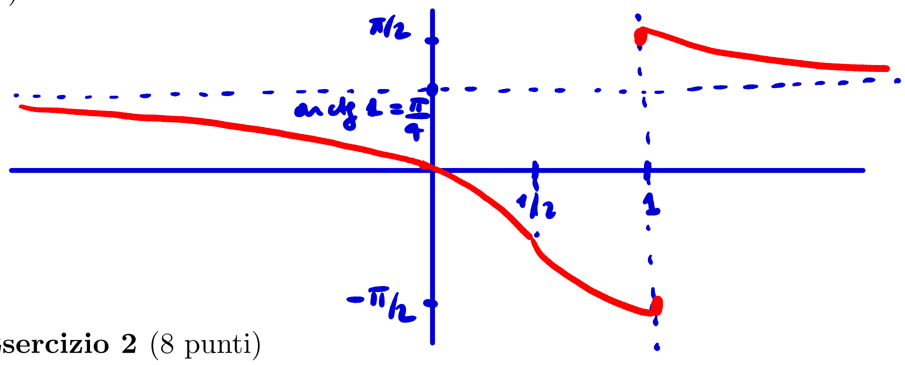
Non ci sono punti critici per f cioè soluzioni di $f'(x) = 0$. Inoltre $f'(x) < 0$ nel dominio quindi la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, 1)$ e in $(1, \infty)$.
Possiamo studiare gli attacchi poiché $\lim_{x\to 1^\pm} f(x)$ è finito:

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{-1}{(x-1)^2 + x^2} = -1.$$

Facoltativo: calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{1}{\Big((x-1)^2 + x^2\Big)^2}(2(x-1) + 2x) = \frac{1}{\Big((x-1)^2 + x^2\Big)^2} 2(2x-1)$$

quindi la funzione è concava per $x < 1/2$ e convessa in $[1/2, 1)$ e in $[1, +\infty)$.
(d)



Esercizio 2 (8 punti)
Si consideri per $\alpha \in \mathbb{R}$ la successione

$$a_n = 2\, n^{\alpha+1} \left(\frac{1}{n^2} - \sin \frac{1}{n^2} \right).$$

1) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_n a_n$.
2) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Soluzione 1) Poiché $1/n \to 0$, utilizziamo i polinomi di Taylor e riscriviamo a_n come polinomio nella variabile $1/n$, più un resto. Poiché $\sin \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{6n^6} + o(\frac{1}{n^6})$, sostituendo in a_n otteniamo

$$\lim_n n^{\alpha+1} \left(\frac{1}{n^2} - \sin \frac{1}{n^2} \right) = \lim_n n^{\alpha+1} (\frac{1}{6n^6} + o(\frac{1}{n^6})) = \lim_n \frac{1}{6n^{6-\alpha-1}} = \lim_n \frac{1}{6n^{5-\alpha}}$$

Quindi $\lim_n a_n = 0$ se $\alpha < 5$, $\lim_n a_n = +\infty$ se $\alpha > 5$, $\lim_n a_n = 1/6$ se $\alpha = 5$.
2) Poiche la serie è a termini positivi, dal punto 1) sappiamo che $a_n \sim \frac{1}{6n^{5-\alpha}}$ quindi dal criterio del confronto asintotico $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{5-\alpha}}$ converge cioè se e solo se $5 - \alpha > 1$ cioè $\alpha < 4$.

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} (x^2 + 1) \cos x \; dx.$$

Soluzione Cerchiamo una primitiva di $(x^2+1)\cos x$. Visto che e' il prodotto di un polinomio con una funzione trigonometrica usiamo due volte l'integrazione per parti, prendendo come termine di integrazione x^2+1.

$$\int (x^2+1)\cos x\,dx = (x^2+1)\sin x - \int 2x\sin x\,dx = (x^2+1)\sin x - 2x(-\cos x) + \int 2(-\cos x)\,dx =$$
$$(x^2+1)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x.$$

Quindi

$$\int_0^{\pi/2} (x^2+1)\cos x\;dx = \Big((x^2+1)\sin x + 2x\;\cos x - 2\;\sin x\Big)|_0^{\pi/2} = [(\pi/2)^2+1-2]-0 = (\pi/2)^2-1.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Sia

$$f(x,y) = y^3 - 2xy + x^2.$$

Determinare il dominio di f, calcolare i punti critici e studiarne la natura.

Soluzione La funzione è definita in $D=\mathbb{R}^2$ e in D è derivabile. Calcoliamo le derivate in ogni punto di D:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2y+2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2-2x.$$

Troviamo gli eventuali punti critici risolvendo il sistema $-2y+2x=0$ e $3y^2-2x=0$. Dalla prima equazione si ha $y=x$ e la seconda diventa $3x^2-2x=0$ da cui si ottiene $x=0$ e $x=\frac{2}{3}$ e quindi $y=0$ e $y=\frac{2}{3}$, cioè i punti critici sono $(0,0)$ e $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

Scriviamo la matrice Hessiana in un punto generico e poi calcoliamola in $(0,0)$ e $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$. Si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = -2.$$

Quindi nel punto $(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = -2$$

cioè

$$D^2f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha che $\det D^2f(0,0) = -4$ quindi la matrice è indefinita e $(0,0)$ è un punto di sella.
Nel punto $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{2}{3},\frac{2}{3}) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{2}{3},\frac{2}{3}) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\frac{2}{3},\frac{2}{3}) = -2$$

cioè

$$D^2f(\frac{2}{3},\frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si ha che $\det D^2f(\frac{2}{3},\frac{2}{3}) = 4$, l'elemento in alto a sinistra è positivo quindi la matrice è definita positiva e $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ è un punto minimo locale.