Segnali e Sistemi

Tempo 2 ore e 30 minuti **Nessun documento ammesso**

Istruzioni. Il compito va eseguito sui fogli a quadretti forniti. Scrivere Cognome Nome e Matricola su ogni foglio da consegnare. Per ogni domanda, motivare la risposta e riportare tutti i calcoli ritenuti necessari. Quando si richiede di tracciare un segnale, bisogna individuarne il supporto e tracciarne in modo anche approssimativo l'andamento. Consegnare unicamente il compito, senza "brutta copia".

Per superare l'esame bisogna ottenere almeno 10 punti negli esercizi ed almeno 5 tra teoria e Matlab.

Esercizio 1: Sistemi LTI a tempo discreto, 7 punti

Siano $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ due sistemi LTI a tempo discreto con risposte impulsive rispettivamente pari a:

$$h_1 : n \in \mathbb{Z} \to \delta(n-2) - \frac{1}{3}\delta(n-3) \qquad\qquad h_2 : n \in \mathbb{Z} \to 3^{-n}u(n+1),$$

dove $\delta(n) = 1$ se $n = 0$ e $\delta(n) = 0$ altrimenti. Sia poi $\mathcal{S}$ il sistema formato dalla serie di $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ e sia h la risposta impulsiva di tale nuovo sistema.

1. Discutere stabilità e causalità di $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.
2. Calcolare le risposte in frequenza $H_1(\omega)$ e $H_2(\omega)$ dei sistemi $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.
3. Tracciare l'andamento di $|H_1(\omega)|^2$ e $|H_2(\omega)|^2$, anche in modo approssimativo. **Suggerimento.** Tracciare $|H_1|^2$ e usare il risultato ottenuto per tracciare l'andamento di $|H_2|^2$.
4. Determinare la risposta in frequenza del sistema $\mathcal{S}$ e dedurne la risposta impulsiva. Dedurre se tale sistema è causale e stabile
5. Determinare la risposta $y(n)$ di $\mathcal{S}$ all'ingresso $x(n) = \cos\left(-27.2 \cdot \pi \cdot n + \frac{57}{9}\pi\right) + \cos\left(10^{-5} \cdot \pi \cdot n + \frac{48}{13} \cdot \pi\right)$. Esprimere y come somma di sinusoidi in forma canonica.

Soluzione dell'esercizio 1

1. La RI (risposta impulsiva) di $\mathcal{S}_1$ ha supporto solo per $n > 0$ quindi il sistema è causale. Invece la RI di $\mathcal{S}_2$ ha supporto $n \geq -1$, quindi il sistema è non causale. Entrambe le RI sono assolutamente sommabili quindi entrambi i sistemi sono BIBO stabili.

2. I sistemi sono stabili, quindi ha senso calcolare la risposta in frequenza (RF). Applicando la definizione di RF per sistemi t.d., abbiamo:

$$H_1(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_1(n)e^{-j\omega n} = e^{-2j\omega} - \frac{1}{3}e^{-3j\omega} = e^{-2j\omega}\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)$$

$$H_2(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_2(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^n = 3e^{j\omega} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^n = 3e^{j\omega} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{3e^{j\omega}\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)+1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} = \frac{3e^{j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

3. Calcoliamo il modulo quadro di ognuna delle due risposte in frequenza, ricordando che $\left|e^{j\theta}\right| = 1\ \forall\theta \in \mathbb{R}$:

$$|H_1(\omega)|^2 = \left|1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right|^2 = \left|1 - \frac{1}{3}\cos\omega + j\frac{1}{3}\sin\omega\right|^2 = 1 + \frac{1}{9} - \frac{2}{3}\cos\omega = \frac{2}{9}\left(5 - 3\cos\omega\right)$$

$$|H_2(\omega)|^2 = \left|\frac{3}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}\right|^2 = \frac{9}{|H_1(\omega)|^2} = \frac{81}{10-6\cos\omega}$$

L'andamento di $|H_1(\omega)|^2$ è facile da tracciare: un coseno (in opposizione di fase, cioè con il minimo in zero) che oscilla tra $\frac{4}{9}$ e $\frac{16}{9}$, di cui si può tracciare in modo approssimato la radice quadrata. L'andamento di $|H_2(\omega)|$ si ottiene considerando il reciproco della funzione precedente. I grafici di $|H_1(\omega)|$ e $|H_2(\omega)|$ sono illustrati in Fig. **??**.

4. La serie di due LTI è un altro LTI la cui risposta impulsiva è la convoluzione delle risposte impulsive. Ne segue che la risposta in frequenza $H(\omega)$ di $\mathcal{S}$ è il prodotto di H_1 e H_2. Si ha:

$$H(\omega) = \frac{e^{j\omega} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = e^{j\omega}\frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = e^{j\omega}$$

e quindi $h(n) = \delta(n+1)$.

5. I tre sistemi sono stabili in quanto le 3 risposte impulsive sono tutte assolutamente sommabili. Il supporto di h_2 è $\mathbb{Z}^+$, quindi $\mathcal{S}_2$ è causale. Invece h e h_1 sono non nulle per $n{=}-1$, quindi entrambi i sistemi $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}_1$ non possono essere causali. Più precisamente, $\mathcal{S}$ è anticausale poiché $h(n) = 0\ \forall n \geq 0$.

6. Per prima cosa riscriviamo i segnale $x(n)$ come somma di sinusoidi in forma canonica:

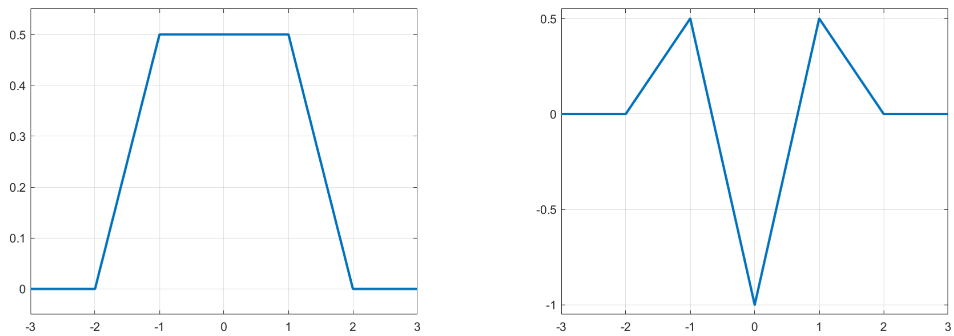
$$\begin{aligned}
\cos(199.7 \cdot \pi \cdot n) &= \cos\left[(200 - 0.3) \cdot \pi \cdot n\right] = \cos\left[200 \cdot \pi \cdot n - 0.3 \cdot \pi \cdot n\right] = \cos\left(\frac{3\pi}{10}n\right) \\
\cos\left(54.1 \cdot \pi \cdot n + 255.5 \cdot \pi\right) &= \cos\left(54\pi n + \frac{\pi}{10}n + 256\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{10}n - \frac{\pi}{2}\right) \\
x(n) &= \cos\left(\frac{3\pi}{10}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10}n - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che, essendo $h(n) = \delta(n+1)$, allora $y(n) = h * x(n) = x(n+1)$ e quindi

$$\begin{aligned}
y(n) = x(n+1) &= \cos\left[\frac{3}{10}\pi(n+1)\right] + \cos\left[\frac{1}{10}\pi(n+1) - \frac{\pi}{2}\right] \\
&= \cos\left(\frac{3\pi}{10}n + \frac{3\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10}n - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10}n + \frac{3\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10}n - \frac{2\pi}{5}\right)
\end{aligned}$$

Esercizio 2: Trasformata di Fourier t.c., 7 punti

Si considerino i segnali rappresentati nelle Figure 1a e 1b. I segnali sono identicamente nulli al di fuori dell'intervallo rappresentato in figura.



(a) (b)

Figura 1: I segnali $x_1(t)$ (sinistra) e $x_2(t)$ (destra).

1. Esprimere x_1 e x_2 tramite la funzione $\Lambda(t) = (1 - |t|)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$
2. Osservando che $\Lambda(t) = \mathrm{rect} * \mathrm{rect}(t)$, calcolare la trasformata di Fourier a tempo continuo di x_1 e x_2

3. Sia $Y(\omega) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$. Calcolare $z(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[Y(\omega) * X_1(\omega)\right](t)$ ($\mathcal{F}^{-1}$ è la trasformata di Fourier inversa)

Soluzione dell'esercizio 2

1. Per il segnale x_1 abbiamo due rappresentazioni equivalenti:

$$x_1(t) = \Lambda\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\Lambda(t) \qquad\qquad x_1(t) = \frac{1}{2}\Lambda(t+1) + \frac{1}{2}\Lambda(t) + \frac{1}{2}\Lambda(t-1)$$

Similmente per x_2:

$$x_2(t) = \Lambda\left(\frac{t}{2}\right) - 2\Lambda(t) \qquad\qquad x_2(t) = \frac{1}{2}\Lambda(t+1) - \Lambda(t) + \frac{1}{2}\Lambda(t-1)$$

2. Siccome $\mathcal{F}\left[\mathrm{rect}(t)\right](\omega) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$, allora $\mathcal{F}\left[\Lambda(t)\right](\omega) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$. Usando le regole del cambio di scale e della traslazione nel tempo abbiamo:

$$X_1(\omega) = 2\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{\pi}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \qquad\qquad \begin{aligned} X_1(\omega) &= \frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\left(e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\left[1 + 2\cos(\omega)\right] \end{aligned}$$

Si può mostrare che le due espressioni trovate per X_1 sono equivalenti.

Similmente,

$$X_2(\omega) = 2\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{\pi}\right) - 2\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \qquad\qquad \begin{aligned} X_2(\omega) &= \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{2}e^{j\omega} - 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) \\ &= \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\left[\cos(\omega) - 1\right] \end{aligned}$$

3. Ricordiamo che sotto ipotesi di esistenza delle trasformate di Fourier, $\mathcal{F}\left[v(t)w(t)\right](\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(V(\omega)W(\omega)\right)$. Ne consegue che

$$z(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[Y(\omega) * X_1(\omega)\right](t) \qquad = \mathcal{F}^{-1}\left[2\pi\mathcal{F}\left[x_1(t)y(t)\right]\right](t) \qquad = 2\pi x_1(t)y(t)$$

Inoltre, dall'espressione di $Y(\omega)$ si deduce che $y(t) = \mathrm{rect}(t)$. Siccome $\forall t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $x_1(t) = \frac{1}{2}$, concludiamo che

$$z(t) = \pi\mathrm{rect}(t)$$

Esercizio 3: Campionamento, 7 punti

Si considerino i seguenti segnali: $x(t)$ è un segnale a banda limitata con pulsazione massima $\omega_{\max} = 2$ di cui in Fig. 2 è raffiguarato il modulo della trasformata di Fourier; il segnale $y(t)$ è ottenuto come modulazione di x: $y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t)$, con $\omega_0 > 0$; abbiamo poi $v(n) = y(nT_1)$ con $T_1 > 0$ e $w(n) = v(3n)$.

1. Calcolare $Y(\omega)$ in funzione di $X(\omega)$.
2. Tracciare l'andamento di $Y(\omega)$ distinguendo opportunamente i casi a seconda del valore di ω_0
3. Sia $z(t) = y(t)\cos(\omega_0 t)$. Calcolare $Z(\omega)$ in funzione di $X(\omega)$
4. In quali casi si può ricostruire x effettuando un filtraggio passa-basso ideale su z? Quale deve essere la pulsazione di taglio del filtro (cioè la massima pulsazione per cui la risposta in frequenza del filtro è non nulla)?
5. È possibile recuperare x da v? In che condizioni?
6. È possibile recuperare x da w? In che condizioni?

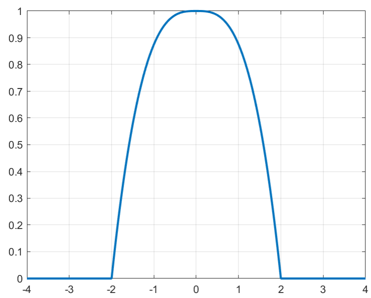


Figura 2: Modulo della trasformata di Fourier del segnale x nell'esercizio 3.

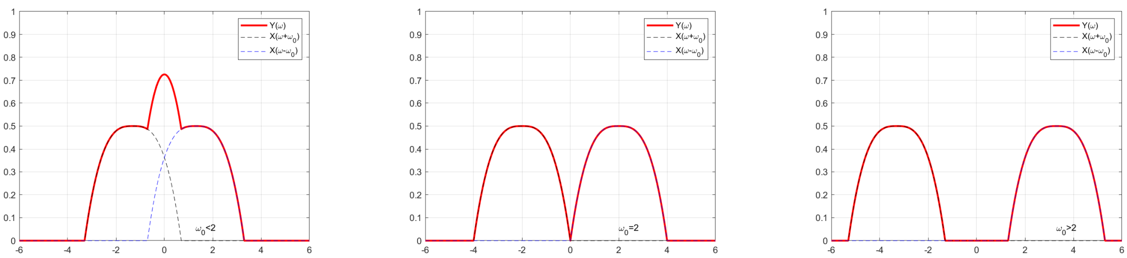


Figura 3: Andamento di $Y(\omega)$ per $\omega_0 < 2$, $\omega_0 = 2$ e $\omega_0 > 2$.

Soluzione dell'esercizio 3

1. $Y(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega - \omega_0)$
2. Vedere la Fig. 3
3. $Z(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega) + \frac{1}{4}X(\omega + 2\omega_0) + \frac{1}{4}X(\omega - 2\omega_0)$
4. Bisogna che le repliche $\frac{1}{4}X(\omega + 2\omega_0)$ e $\frac{1}{4}X(\omega - 2\omega_0)$ non siano sovrapposte in frequenza con il termine $\frac{1}{2}X(\omega)$. Per ottenere ciò, è sufficiente che sia $2 \leq 2\omega_0 - 2$, cioè $\omega_0 \geq 2$. A questo punto, la pulsazione di un filtro passa-basso ideale può essere ovunque tra 2 e $2\omega_0 - 2$, per esempio possiamo prendere il punto medio dell'intervallo: $\omega_c = \frac{1}{2}\omega_0$.

   Attenzione, è sbagliato parlare di aliasing per queste operazioni, perché non stiamo considerando il problema del campionamento, bensì quello della modulazione (e demodulazione).

5. La prima condizione è che sia possibile recuperare y da v. Ciò è vero se il periodo di campionamento T_1 è sufficientemente piccolo. Più precisamente deve essere $T_1 < \frac{\pi}{\omega_{\max}}$, dove $\omega_{\max}$ è la massima pulsazione contenuta in y. Abbiamo quindi $\omega_{\max} = \omega_0 + 2$, e quindi $T_1 < \frac{\pi}{\omega_0+2}$. Inoltre deve essere possibile recuperare x da y. Ciò si può fare, come visto al punto precedente, se $\omega_0 \geq 2$. In conclusione le due condizioni sono:
$$\begin{cases} \omega_0 \geq 2 \\ T_1 < \frac{\pi}{\omega_0+2} \end{cases}$$

6. Similmente a prima, dobbiamo avere $\omega_0 \geq 2$ per recuperare x da y; questa volta per recuperare y da w, bisognerà porre $3T_1 < \frac{\pi}{\omega_{\max}}$. In conclusione,
$$\begin{cases} \omega_0 \geq 2 \\ T_1 < \frac{\pi}{3(\omega_0+2)} \end{cases}$$

Domanda teorica 1 : Trasformata di Fourier a t.c., 4 punti

1. Ricordare le formule di analisi e sintesi del TFtc
2. Ricordare e dimostrare le proprietà di modulazione e traslazione
3. Esprimere la TFtc di un segnale periodico in termini di coefficienti della serie di Fourier

Soluzione dell'esercizio

1. Le formule di analisi e sintesi della TFtc per un segnale $x(t)$ sono rispettivamente:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt \qquad\qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

2. Detta $X(\omega)$ la TFtc del segnale $x(t)$, si ha:

$$\mathcal{F}\left[x(t)e^{j\omega_0 t}, t \to \omega\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}\,dt = X(\omega-\omega_0)$$
$$\mathcal{F}\left[x(t-t_0), t \to \omega\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)}\,dt = X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

3. Sia $x(t)$ un segnale periodico di periodo $T > 0$ e siano a_k i coefficienti della sua serie di Fourier. Esprimiamo $x(t)$ con la formula di sintesi della serie di Fourier, e applichiamo la TFtc:

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}e^{-j\omega t}\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T}t}e^{-j\omega t}\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\delta\left(\omega - jk\frac{2\pi}{T}\right)$$

dove abbiamo sfruttato la linearità degli operatori coinvolti e la proprietà di modulazione applicata alla trasformata della costante

Domanda teorica 2 : Trasformata di Laplace, 4 punti

1. Dare la definizione di *funzione dotata di Trasf. di Laplace* e la formula di tale trasformata.
2. Ricordare quali sono i 5 diversi tipi di ROC e per ogni caso discutere le proprietà di causalità del segnale nel dominio del tempo
3. Mostrare un esempio di funzione della variabile complessa s che, a seconda della ROC è la TdL di due segnali diversi (eseguire i calcoli necessari).

Soluzione dell'esercizio

1. Un segnale $x(t)$ è detto essere dotato di TL se e solo se $\exists s_0 \in \mathbb{C} : x(t)e^{-s_0 t} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. In tal caso, dato $s \in \mathbb{C}$ l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt$ ha un insieme di convergenza non vuoto. Su tale insieme, detto regione di convergenza (ROC), si può allora definire un nuovo segnale:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt.$$

Tale segnale è per definizione, la TL di $x(t)$.

2. I possibili tipi di ROC sono:
   (a) $R = \emptyset$; x può essere causale, anticausale o non causale
   (b) $R = \mathbb{C}$; x può essere causale, anticausale o non causale
   (c) $R = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \lambda\}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ ("semipiano destro"); x è causale o non causale

(d) $R = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) < \lambda\}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ ("semipiano sinistro"); x è anticausale o non causale

(e) $R = \{s \in \mathbb{C} : \lambda_1 < \mathrm{Re}(s) < \lambda_2\}$, con $\lambda_1 < \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ("striscia"); x è non causale

Equivalentemente, si può dire:

(a) Per segnali causali, $\exists\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} : R = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \lambda\}$.

(b) Per segnali anticausali, $\exists\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} : R = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) < \lambda\}$.

(c) Per segnali non causali, $\exists\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} : R = \{s \in \mathbb{C} : \lambda_1 < \mathrm{Re}(s) < \lambda_2\}$.

3. Un esempio è la funzione $\frac{1}{s}$, che risulta essere la TL di due diverse funzioni a seconda della ROC. Infatti abbiamo, in un primo caso, posto $x(t) = u(t)$ (gradino unitario),

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-st}\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{+\infty}$$

Ora, $|e^{-st}| = e^{-\mathrm{Re}(s)t}$ e quindi $\lim_{t\to+\infty} |e^{-st}| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(s) > 0$. In tal caso l'integrale risulta quindi uguale a $\frac{1}{s}$, con ROC $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Posto invece $y(t) = -u(-t)$ abbiamo invece:

$$Y(s) = -\int_{-\infty}^{+\infty} u(-t)e^{-st}\,dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_{-\infty}^{0}$$

Adesso $\lim_{t\to-\infty} |e^{-st}| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(s) < 0$. Tale integrale risulta anch'esso uguale a $\frac{1}{s}$, ma con ROC $\mathrm{Re}(s) < 0$.

Domanda di Matlab : Rappresentazione di segnali, 3 punti

Si consideri il segnale $x(t) = Ae^{-3t}u(t)$. Scrivere uno script Matlab che:

1. Calcoli $x(t)$ nell'intervallo $(0, T)$ campionato a passo $\Delta = 10^{-3}$, con $A = 4$, $T = 10$,
2. Tracci in una figura l'andamento di $x(t)$ nel suddetto intervallo.
3. Tracci in una seconda figura l'andamento del modulo di $X(\omega)$, la TFtc di x. Usare la FFT con un opportuno zero-padding.
4. Tracci in una terza figura l'andamento teorico di $|X(\omega)|$ N.B. dovrete quindi calcolare analiticamente (non in Matlab) la TFtc di x.

Soluzione dell'esercizio

Una possibile implementazione dello script è la seguente:

```
%% 4.1
u = @(t) t>=0;
Delta = 1e-3;
A=4; T=10;
t = 0:Delta:T;
x= A*exp(-3*t).*u(t);
%% 4.2
figure(1);
h=plot(t,x,'LineWidth',2);
grid; xlabel('t'); ylabel('x(t)');
```

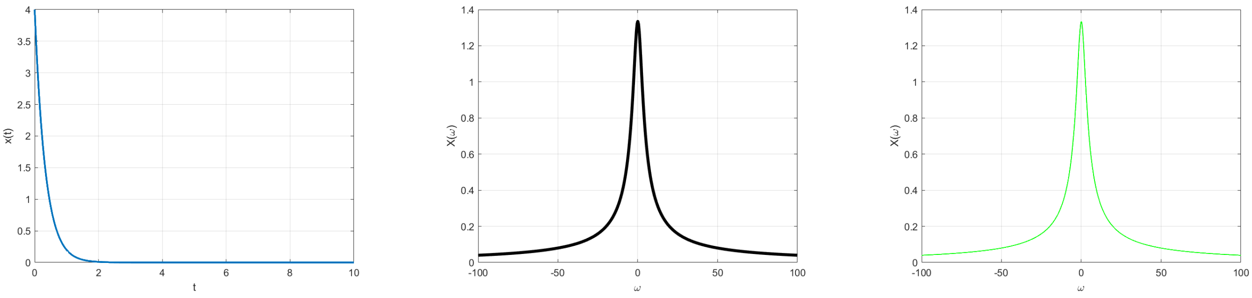


Figura 4: I grafici prodotti dallo script

```
%%  4.3
M=2^(3+nextpow2(numel(t)));
X = Delta*(abs(fft(x,M)));
figure(2);
omegaMax=pi/Delta;
step = 2/M *omegaMax;
w = -omegaMax:step:(omegaMax-step);
plot(w,fftshift(abs(X)),'LineWidth',3, 'Color','black');
grid;xlabel('\omega'); ylabel('X(\omega)')

%% 4.4
% La TFtc di x(t) = A e^(-3t) u(t) e` X(w)= A/(3+jw)
X_teorico = A./(3+w*1i);
figure(3);
plot(w,abs(X_teorico), 'g-', 'LineWidth',1);
```