ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2024-2025

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

23 gennaio 2025

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x\,(\log x)^2 + 1$$

(a) Determinare il dominio, segno, eventuali simmetrie o periodicità;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f;

(d) studiare la concavità e la convessità della funzione e gli eventuali flessi;

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti)
Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin x - \log(1+x^2)}{x^\alpha}.$$

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x - 3}dx.$$

Facoltativo Dire se converge e in caso affermativo calcolare l'integrale generalizzato $\int_{\log 2}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x-3}dx$.

Esercizio 4 (8 punti)
Determinare il carattere della serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n!}$$

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

Soluzioni

Soluzione esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = x\,(\log x)^2 + 1$$

(a) Il dominio è dato da $(0, +\infty)$. Dato che il dominio non è simmetrico e non è periodico, la funzione non ammette simmetrie né periodicità. Infine dato che $x > 0$ nel dominio e $(\log x)^2 \geq 0$, si ha che $f(x) = x\,(\log x)^2 + 1 \geq 1 > 0$ per ogni $x \in D$.

(b) Calcoliamo il limite in 0^+. Per confronto tra infiniti ho che $\lim_{x\to 0^+} x^h(\log x)^k = 0$ per ogni $h, k > 0$, dunque

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$

Quindi il punto $x = 0$ è una singolarità eliminabile e possiamo prolungare f per continuità in $x = 0$ ponendo $f(0) = 1$.

Calcoliamo il limite a $+\infty$: è immediato vedere che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. La funzione non ammette asintoto orizzontale. Cerco un eventuale asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\log x)^2 + \frac{1}{x} = +\infty.$$

La funzione non ammette asintoto obliquo.

(c) f è continua nel dominio esteso $[0, +\infty)$. Calcoliamo la derivata per $x > 0$:

$$f'(x) = 1(\log x)^2 + x\ 2\log x\frac{1}{x} = (\log x)^2 + 2\log x = \log x(\log x + 2).$$

La funzione è derivabile per ogni $x > 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (\log x)^2 \left[1 + \frac{2}{\log x}\right] = +\infty.$$

In $x = 0$ la funzione ha un attacco verticale.

Per studiare la monotonia della funzione, studio il segno di $f'(x) = \log x(\log x + 2)$. Si ha che $\log x \geq 0$ se e solo se $x \geq 1$, mentre $(\log x + 2) \geq 0$, se e solo se $\log x \geq -2$ e cioé $x \geq e^{-2}$. Facendo lo studio dei segni concludiamo che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 1$ oppure $0 < x \leq e^{-2}$. Quindi per il criterio di monotonia la funzione è crescente in $(0, e^{-2})$ e in $(1, +\infty)$ e decrescente in $(e^{-2}, 1)$.

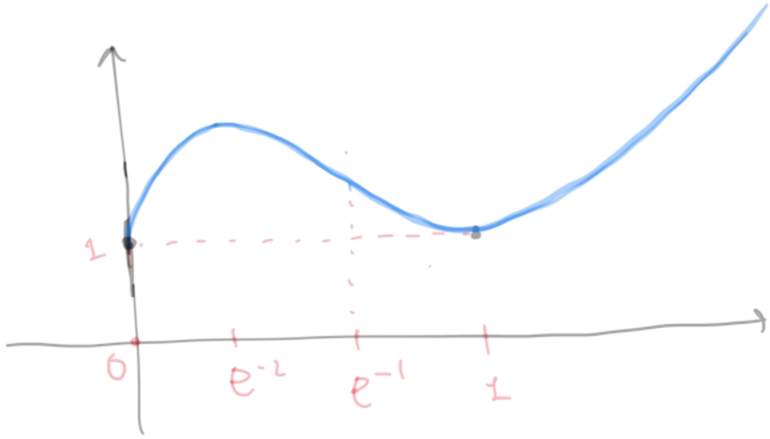
Il punto $x = e^{-2}$ è un punto di massimo locale (non assoluto dato che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$), mentre $x = 0$ e $x = 1$ sono punti di minimo locale. Inoltre $f(0) = 1$ e $f(1) = 1(\log 1)^2 + 1 = 1$, e inoltre $f(x) \geq 1$ per ogni $x \in D$. Dunque i punti $x = 0$ e $x = 1$ sono entrambi punti di minimo assoluto.

(d) Per studiare la convessità e concavità studio il segno della derivata seconda di f. Calcoliamo la derivata seconda per $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{1}{x}(\log x + 2) + \log x\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}(\log x + 2 + \log x) = \frac{1}{x}(2\log x + 2) = \frac{2}{x}(\log x + 1).$$

Dunque dato che $x > 0$, ho che $f''(x) \geq 0$ se e solo se $\log x + 1 \geq 0$, quindi $\log x \geq -1$ che equivale a $x \geq e^{-1}$. Per il criterio di convessità f è convessa in $(e^{-1}, +\infty)$ e concava in $(0, e^{-1})$; $x = e^{-1}$ è un punto di flesso.

(e)



Esercizio 2
Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \sin x - \log(1+x^2)}{x^\alpha}.$$

Utilizziamo i polinomi di Tayor.

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \qquad \log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Dunque otteniamo che il numeratore diventa:

$$x \sin x - \log(1+x^2) = x\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) - \left(x^2 - \frac{1}{2}(x^2)^2 + o((x^2)^2)\right) =$$

$$x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = \frac{2}{6}x^4 + o(x^4) = x^4\left(\frac{1}{3} + o(1)\right).$$

Il limite diventa

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \sin x - \log(1+x^2)}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^4\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } \alpha = 4 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 4 \\ 0 & \text{se } \alpha < 4. \end{cases}$$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x - 3} dx.$$

Operiamo il cambio di variabile $y = e^x$: abbiamo dunque che $x = \log y$, e $dx = \frac{1}{y}dy$. L'integrale diventa (cambiando anche gli estremi di integrazione, ricordando che $e^{\log a} = a$ per ogni $a > 0$):

$$\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x - 3} dx = \int_2^3 \frac{y}{y^2 + 2y - 3} \frac{1}{y} dy = \int_2^3 \frac{1}{y^2 + 2y - 3} dy.$$

Per risolvere l'integrale utilizziamo il metodo dei fratti semplici. Le due radici di $y^2 + 2y - 3$ sono 1 e -3, dunque $y^2 + 2y - 3 = (y-1)(y+3)$ e riscriviamo

$$\frac{1}{y^2 - 2y + 3} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+3} = \frac{Ay + 3A + By - B}{(y-1)(y+3)}.$$

Il sistema per A, B è dato da

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A-B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-B \\ 4A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Dunque

$$\int \frac{1}{y^2+2y-3}dy = \frac{1}{4}\int \frac{1}{y-1}dy - \frac{1}{4}\int \frac{1}{y+3}dy = \frac{1}{4}\log|y-1| - \frac{1}{4}\log|y+3| + c = \frac{1}{4}\log\left|\frac{y-1}{y+3}\right| + c.$$

Per il corollario del teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo che

$$\int_2^3 \frac{1}{y^2+2y-3}dy = \frac{1}{4}\log\left|\frac{3-1}{3+3}\right| - \frac{1}{4}\log\left|\frac{2-1}{2+3}\right| = \frac{1}{4}\log\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{5} = \frac{1}{4}\log\frac{5}{3}.$$

Facoltativo Dire se converge e in caso affermativo calcolare l'integrale generalizzato $\int_{\log 2}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x-3}dx$. Abbiamo che

$$\int_{\log 2}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x-3}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_{\log 2}^{M} \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x-3}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_{2}^{e^M} \frac{1}{y^2+2y-3}dy =$$

$$\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{4}\log\frac{e^M}{e^M+3} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{5} = \lim_{M\to+\infty}\frac{1}{4}\log\left(\frac{e^M}{e^M\left(1+\frac{3}{e^M}\right)}\right) - \frac{1}{4}\log\frac{1}{5} =$$

$$= \frac{1}{4}\log 1 - \frac{1}{4}\log\frac{1}{5} = -\frac{1}{4}\log\frac{1}{5} = \frac{1}{4}\log 5.$$

L'integrale converge.

Esercizio 4

Determinare il carattere della serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n}{n!}.$$

Procediamo con il criterio del rapporto.

$$a_n = \frac{4^n}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{4\ 4^n}{(n+1)n!}.$$

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1}\frac{1}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4\ 4^n}{(n+1)n!}\frac{n!}{4^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n+1} = 0 < 1.$$

La serie converge per il criterio del rapporto.