ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{x-2}\right).$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento: Il dominio é $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$. La funzione é continua in tale dominio perché composizione di funzioni continue. Calcoliamo i limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) \pm \frac{\pi}{4}$$

Quindi la retta $y = \frac{\pi}{4}$ é asintoto orizzontale destro, la retta $y = -\frac{\pi}{4}$ é asintoto orizzontale sinistro. Nel punto $x = 2$ c'é una discontinuitá di salto. Ovviamente la funzione ṕositiva per $x > 2$ e negativa per $x < 2$.

Per ogni $x \in \frac{D}{\{0\}}$ possiamo calcolare la derivata prima

$$f'(x) = \frac{(x-2)\text{signx} - |x|}{1 + \frac{x^2}{(x-2)^2}} = -\frac{2\text{signx}}{(x-2)^2 + x^2}$$

Lo studio del segno di f' non presta acuna difficoltá. La funzione cresce per $x < 0$ e decresce per $x > 0$. Vediamo gli attacchi di f' in $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \mp\frac{1}{2}$$

Quindi 0 é un punto angoloso di max relativo stretto. Si vede anche facilmente che $\sup f = \frac{\pi}{2}$ mentre $\inf f = -\frac{\pi}{2}$. Non ci sono punti di min e max assoluti.

Il grafico della funzione segue:

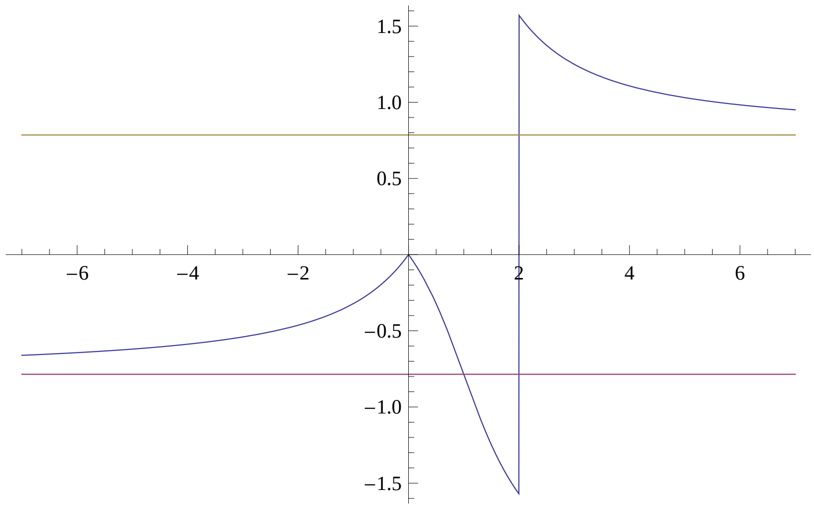

Figure 1: abbozzo del grafico della funzione dell'esercizio 1.

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 2)^k}{k^2 + 3}.$$

Svolgimento: Studiamo inizialmente la convergenza assoluta della serie usando il criterio del rapporto:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|\log a + 2|^{k+1}}{(k+1)^2 + 3} \frac{k^2 + 3}{|\log a + 2|^k} = |\log a + 2|$$

Quindi se $|\log a + 2| < 1$, cioé $a \in \left(\frac{1}{\mathrm{e}^3}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ la serie converge assolutamente. Mentre per $\left\{0 < a < \frac{1}{\mathrm{e}^3}\right\} \cup \left\{a > \frac{1}{\mathrm{e}}\right\}$ la serie non converge. Per i punti $a = \frac{1}{\mathrm{e}^3}$ e $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$ é sufficiente osservare che in entrambi i casi si ha $|a_k| \sim \frac{1}{k^2}$ e quindi anche in questi punti abbiamo convergenza assoluta (e quindi semplice).

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 - \alpha x - x^2) + \sin x}{\cosh x - 1}.$$

Svolgimento: Si ottiene facilmente che per $x \to 0^+$ $\cosh x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$. Usando gli sviluppi di Mc Laurin per il numeratore otteniamo

$$\log(1 - \alpha x - x^2) + \sin x = (-\alpha x - x^2) - \frac{(\alpha x + x^2)^2}{2} + o(x^2) + x = x(1 - \alpha) - x^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) + o(x^2)$$

Quindi Per $\alpha > 1$ Il limite diverge a $-\infty$, per $\alpha < 1$ il limite diverge a $+\infty$ mentre per $\alpha = 1$ converge a -3.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \dfrac{\cos x}{2 \sin x + x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x)\, dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x)\,dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Poniamo $2\sin x + 1 = t$ da cui $2\cos x dx = dt$. Sostituendo l'integrale diventa

$$\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\log 3$$

Per la convergenza notiamo che l'unico punto pericoloso per la funzione integranda é $x = 0$. Quindi usiamo il criterio asintotico per $x \to 0^+$. Si vede immediatamente che $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2x+x^\alpha}$. Quindi per $\alpha < 1$ abbiamo $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$ e quindi l'integrale converge. Per $\alpha > 1$ abbiamo $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2x}$ e quindi l'integrale diverge, mentre per $\alpha = 1$ abbiamo $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{3x}$ e quindi l'integrale ancora diverge.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{2-x}\right).$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento: Il dominio é $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$. La funzione é continua in tale dominio perché composizione di funzioni continue. Calcoliamo i limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} f(x) = \mp\tfrac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \mp \tfrac{\pi}{4}$$

Quindi la retta $y = \frac{\pi}{4}$ é asintoto orizzontale sinistro, la retta $y = -\frac{\pi}{4}$ é asintoto orizzontale destro. Nel punto $x = 2$ c'é una discontinuitá di salto. Ovviamente la funzione ṕositiva per $x < 2$ e negativa per $x > 2$.

Per ogni $x \in \frac{D}{\{0\}}$ possiamo calcolare la derivata prima

$$f'(x) = \frac{(2-x)\text{signx} + |x|}{1 + \frac{x^2}{(2-x)^2}} = \frac{2\text{signx}}{(2-x)^2 + x^2}$$

Lo studio del segno di f' non presta alcuna difficoltá. La funzione decresce per $x < 0$ e cresce per $x > 0$. Vediamo gli attacchi di f' in $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = \pm\frac{1}{2}$$

Quindi 0 é un punto angoloso di min relativo stretto. Si vede anche facilmente che $\sup f = \frac{\pi}{2}$ mentre $\inf f = -\frac{\pi}{2}$. Non ci sono punti di min e max assoluti.

Il grafico della funzione segue:

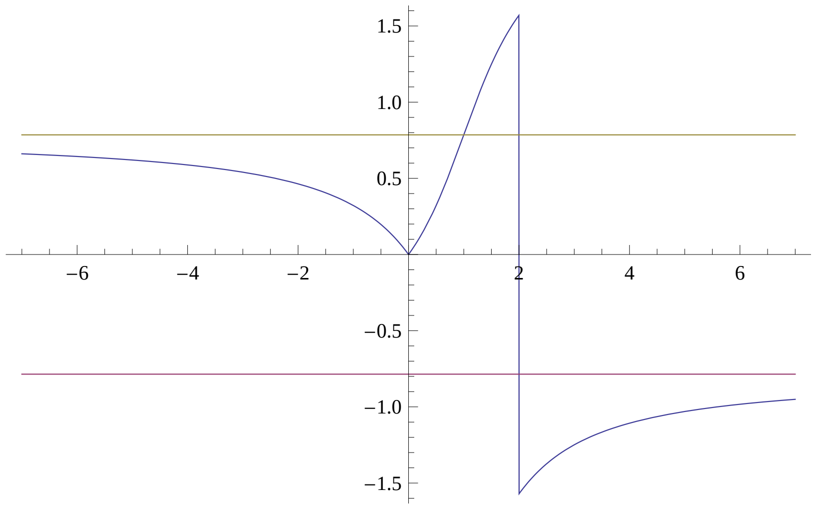

Figure 2: abbozzo del grafico della funzione dell'esercizio 2.

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 3)^k}{k^2 + 2}.$$

Svolgimento: Studiamo inizialmente la convergenza assoluta della serie usando il criterio del rapporto:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|\log a + 3|^{k+1}}{(k+1)^2 + 2} \frac{k^2 + 2}{|\log a + 3|^k} = |\log a + 3|$$

Quindi se $|\log a + 3| < 1$, cioé $a \in \left(\frac{1}{e^4}, \frac{1}{e^2}\right)$ la serie converge assolutamente. Mentre per $\left\{0 < a < \frac{1}{e^4}\right\} \cup \left\{a > \frac{1}{e^2}\right\}$ la serie non converge. Per i punti $a = \frac{1}{e^4}$ e $a = \frac{1}{e^2}$ é sufficiente osservare che in entrambi i casi si ha $|a_k| \sim \frac{1}{k^2}$ e quindi anche in questi punti abbiamo convergenza assoluta (e quindi semplice).

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 - \alpha x - x^2) + \sinh x}{\cos x - 1}.$$

Svolgimento: Si ottiene facilmente che per $x \to 0^+$ $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$. Usando gli sviluppi di Mc Laurin per il numeratore otteniamo

$$\log(1 - \alpha x - x^2) + \sinh x = (-\alpha x - x^2) - \frac{(\alpha x + x^2)^2}{2} + o(x^2) + x = x(1 - \alpha) - x^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) + o(x^2)$$

Quindi Per $\alpha > 1$ Il limite diverge a $+\infty$, per $\alpha < 1$ il limite diverge a $-\infty$ mentre per $\alpha = 1$ converge a 3.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x + 2x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x)\, dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x)\,dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Poniamo $\sin x + 2 = t$ da cui $\cos x dx = dt$. Sostituendo l'integrale diventa

$$\int_2^3 \frac{dt}{t} = \log\frac{3}{2}.$$

Per la convergenza notiamo che l'unico punto pericoloso per la funzione integranda é $x = 0$. Quindi usiamo il criterio asintotico per $x \to 0^+$. Si vede immediatamente che $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x+2x^\alpha}$. Quindi per $\alpha < 1$ abbiamo $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2x^\alpha}$ e quindi l'integrale converge. Per $\alpha > 1$ abbiamo $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x}$ e quindi l'integrale diverge, mentre per $\alpha = 1$ abbiamo $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{3x}$ e quindi l'integrale ancora diverge.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{3-x}\right).$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento: Il dominio é $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\}$. La funzione é continua in tale dominio perché composizione di funzioni continue. Calcoliamo i limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 3^\pm} f(x) = \mp\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) \mp \frac{\pi}{4}$$

Quindi la retta $y = \frac{\pi}{4}$ é asintoto orizzontale sinistro, la retta $y = -\frac{\pi}{4}$ é asintoto orizzontale destro. Nel punto $x = 3$ c'é una discontinuitá di salto. Ovviamente la funzione ṕositiva per $x < 3$ e negativa per $x > 3$.

Per ogni $x \in \frac{D}{\{0\}}$ possiamo calcolare la derivata prima

$$f'(x) = \frac{(3-x)\text{signx} + |x|}{1 + \frac{x^2}{(3-x)^2}} = \frac{3\text{signx}}{(3-x)^2 + x^2}$$

Lo studio del segno di f' non presta alcuna difficoltá. La funzione decresce per $x < 0$ e cresce per $x > 0$. Vediamo gli attacchi di f' in $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \pm\frac{1}{3}$$

Quindi 0 é un punto angoloso di min relativo stretto. Si vede anche facilmente che $\sup f = \frac{\pi}{2}$ mentre $\inf f = -\frac{\pi}{2}$. Non ci sono punti di min e max assoluti.

Il grafico della funzione segue:

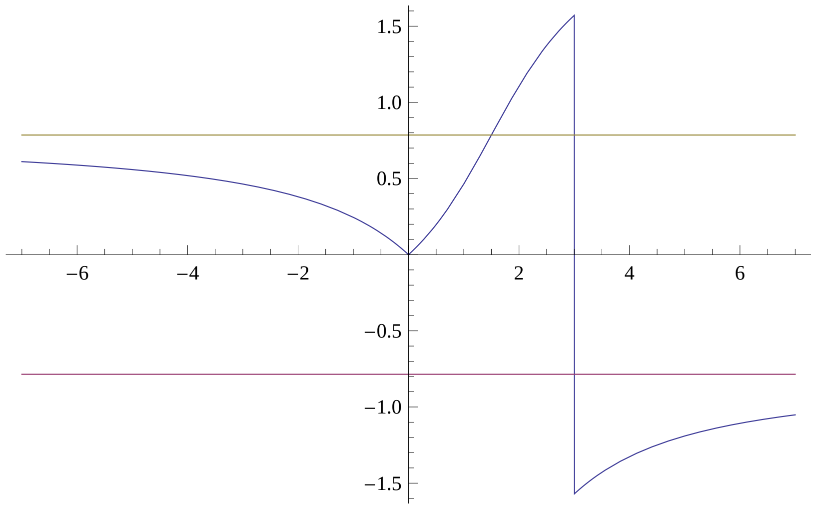

Figure 3: abbozzo del grafico della funzione dell'esercizio 3.

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 4)^k}{k^2 + 1}.$$

Svolgimento: Studiamo inizialmente la convergenza assoluta della serie usando il criterio del rapporto:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|\log a + 4|^{k+1}}{(k+1)^2 + 1} \frac{k^2 + 1}{|\log a + 4|^k} = |\log a + 4|$$

Quindi se $|\log a + 4| < 1$, cioé $a \in \left(\frac{1}{e^5}, \frac{1}{e^3}\right)$ la serie converge assolutamente. Mentre per $\left\{0 < a < \frac{1}{e^5}\right\} \cup \left\{a > \frac{1}{e^3}\right\}$ la serie non converge. Per i punti $a = \frac{1}{e^5}$ e $a = \frac{1}{e^3}$ é sufficiente osservare che in entrambi i casi si ha $|a_k| \sim \frac{1}{k^2}$ e quindi anche in questi punti abbiamo convergenza assoluta (e quindi semplice).

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + \alpha x + x^2) - \sin x}{1 - \cosh x}.$$

Svolgimento: Si ottiene facilmente che per $x \to 0^+$ $1 - \cosh x \sim -\frac{x^2}{2}$. Usando gli sviluppi di Mc Laurin per il numeratore otteniamo

$$\log(1 + \alpha x + x^2) - \sin x = (\alpha x + x^2) - \frac{(\alpha x + x^2)^2}{2} + o(x^2) - x = x(\alpha - 1) + x^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) + o(x^2)$$

Quindi Per $\alpha > 1$ Il limite diverge a $-\infty$, per $\alpha < 1$ il limite diverge a $+\infty$ mentre per $\alpha = 1$ converge a -1.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1 + 2x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x)\, dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x)\, dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Poniamo $e^x + 1 = t$ da cui $e^x dx = dt$. Sostituendo l'integrale diventa

$$\int_2^{1+e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{dt}{t} = \log\left(\frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}\right).$$

Per la convergenza notiamo che l'unico punto pericoloso per la funzione integranda é $x = 0$. Quindi usiamo il criterio asintotico per $x \to 0^+$. Si vede immediatamente che $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x+2x^\alpha}$. Quindi per $\alpha < 1$ abbiamo $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2x^\alpha}$ e quindi l'integrale converge. Per $\alpha > 1$ abbiamo $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x}$ e quindi l'integrale diverge, mentre per $\alpha = 1$ abbiamo $f_\alpha(x) \sim \frac{1}{3x}$ e quindi l'integrale ancora diverge.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{x-3}\right).$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento: Il dominio é $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\}$. La funzione é continua in tale dominio perché composizione di funzioni continue. Calcoliamo i limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 3^\pm} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) \pm \frac{\pi}{4}$$

Quindi la retta $y = \frac{\pi}{4}$ é asintoto orizzontale destro, la retta $y = -\frac{\pi}{4}$ é asintoto orizzontale sinistro. Nel punto $x = 3$ c'é una discontinuitá di salto. Ovviamente la funzione ṕositiva per $x > 3$ e negativa per $x < 3$.

Per ogni $x \in \frac{D}{\{0\}}$ possiamo calcolare la derivata prima

$$f'(x) = \frac{(x-3)\text{signx} - |x|}{1 + \frac{x^2}{(x-3)^2}} = -\frac{3\text{signx}}{(x-3)^2 + x^2}$$

Lo studio del segno di f' non presta alcuna difficoltá. La funzione cresce per $x < 0$ e decresce per $x > 0$. Vediamo gli attacchi di f' in $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \mp\frac{1}{3}$$

Quindi 0 é un punto angoloso di max relativo stretto. Si vede anche facilmente che $\sup f = \frac{\pi}{2}$ mentre $\inf f = -\frac{\pi}{2}$. Non ci sono punti di min e max assoluti.

Il grafico della funzione segue:

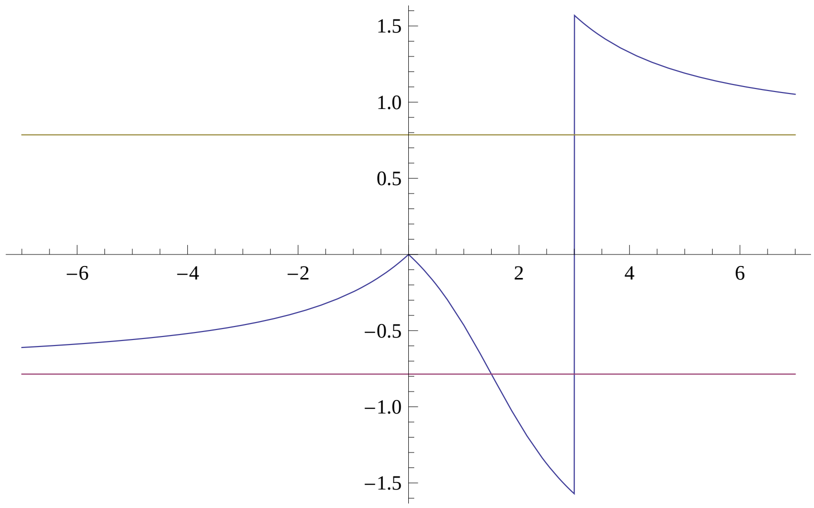

Figure 4: abbozzo del grafico della funzione dell'esercizio 4.

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 1)^k}{k^2 + 4}.$$

Svolgimento: Studiamo inizialmente la convergenza assoluta della serie usando il criterio del rapporto:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|\log a + 1|^{k+1}}{(k+1)^2 + 4} \frac{k^2 + 4}{|\log a + 1|^k} = |\log a + 1|$$

Quindi se $|\log a+1| < 1$, cioé $a \in \left(\frac{1}{e^2}, 1\right)$ la serie converge assolutamente. Mentre per $\left\{0 < a < \frac{1}{e^2}\right\} \cup \{a > 1\}$ la serie non converge. Per i punti $a = \frac{1}{e^2}$ e $a = 1$ é sufficiente osservare che in entrambi i casi si ha $|a_k| \sim \frac{1}{k^2}$ e quindi anche in questi punti abbiamo convergenza assoluta (e quindi semplice).

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + \alpha x + x^2) - \sinh x}{1 - \cos x}.$$

Svolgimento: Si ottiene facilmente che per $x \to 0^+$ $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$. Usando gli sviluppi di Mc Laurin per il numeratore otteniamo

$$\log(1 + \alpha x + x^2) - \sinh x = (\alpha x + x^2) - \frac{(\alpha x + x^2)^2}{2} + o(x^2) - x = x(\alpha - 1) + x^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) + o(x^2)$$

Quindi Per $\alpha > 1$ Il limite diverge a $+\infty$, per $\alpha < 1$ il limite diverge a $-\infty$ mentre per $\alpha = 1$ converge a 1.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x + x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x)\, dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x)\,dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: Poniamo $2-\cos x = t$ da cui $\sin x dx = dt$. Sostituendo l'integrale diventa

$$\int_1^2 \frac{dt}{t} = \log 2.$$

Per la convergenza notiamo che l'unico punto pericoloso per la funzione integranda é $x=0$. Quindi usiamo il criterio asintotico per $x \to 0^+$. Si vede immediatamente che $f_\alpha(x) \sim \frac{x}{\frac{x^2}{2}+x^\alpha}$. Quindi per $\alpha < 2$ abbiamo $f_\alpha(x) \sim \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ e quindi l'integrale converge. Per $\alpha > 2$ abbiamo $f_\alpha(x) \sim \frac{2}{x}$ e quindi l'integrale diverge, mentre per $\alpha = 2$ abbiamo $f_\alpha(x) \sim \frac{2}{3x}$ e quindi l'integrale ancora diverge.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$