Trasformata Z

Dato un segnale t.d. $x: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ed un numero complesso $z \in \mathbb{C}$, si considera la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \qquad (1)$$

Se esiste almeno un $z \in \mathbb{C}$ per cui il segnale $x(n) z^{-n}$ è assolutamente sommabile, allora si dice che x è dotato di Trasformata zeta (TZ)

L'insieme R dei punti $z \in \mathbb{C}$ in cui la (1) converge assolutamente è detto regione di convergenza della TZ.
In tale insieme è possibile definire la funzione:

$$X : z \in R \to \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

indicata con $X(z)$ o $\mathcal{Z}(x(\cdot))(z)$: è la TZ di $x(n)$

Esempio 1 Sia $x(n) = a^n u(n)$, con $a \in \mathbb{C}$.

Si ha: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a z^{-1})^n = \frac{1}{1 - a z^{-1}}$ nella ROC

Serie geometrica di ragione $a z^{-1}$, converge $\forall z: |a z^{-1}| < 1 \iff |z| > |a|$

La ROC è quindi l'esterno di un cerchio di raggio $|a|$

Esempio 2 $\quad x(n) = -a^n u(-n-1)$, $a \neq 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{+\infty} a^{-m} z^{m} - 1 + 1$$

$$= -\sum_{m=0}^{+\infty} \left(a^{-1} z\right)^m + 1$$

Se $|a^{-1} \cdot z| < 1$ la serie converge (ROC = $|z| < |a|$)

$$X(z) = \frac{-1}{1-a^{-1}z} + 1 = \frac{-1+1-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{-1}{az^{-1}-1} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

è la stessa TZ di $a^n u(n)$ ma la ROC è diversa: è l'<u>interno</u> del cerchio di raggio $|a|$

Similmente a quanto visto per la TL, vale un Teorema sulla struttura delle ROC della TZ

- Un segnale causale (cioè con supporto $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$) ha come ROC $|z| > \rho$ con $0 \le \rho \le +\infty$
- Un segnale anticausale (cioè con supporto $\mathbb{Z}_0^- = \{-1, -2, \dots -\infty\}$) ha come ROC $|z| < \rho$ con $0 \le \rho \le +\infty$
- Un segnale generico ha come ROC $\rho_1 < |z| < \rho_2$ con $0 \le \rho_1 \le \rho_2 \le +\infty$ cioè una corona circolare nel piano complesso
- Il cerchio unitario $|z| = 1 \in$ ROC $\Leftrightarrow x \in \ell^1$

Proprietà TZ

sia $X(z)$ la TZ di x, e R_x la sua ROC

1) <u>Coniugio</u> $\mathcal{Z}[\bar{x}(n)] = \bar{X}(\bar{z})$, $ROC = R_x$

2) Traslazione $\mathcal{Z}[x(n-n_0)] = z^{-n_0} X(z)$, $ROC = R_x$, $\forall n_0 \in \mathbb{Z}$

3) Ribaltamento $\mathcal{Z}[x(-n)] = X(z^{-1})$ $ROC = \{z : z^{-1} \in R_x\}$

4) Derivata in z $\mathcal{Z}[n x(n)] = -z \frac{d}{dz} X(z)$ $ROC = R_x$

5) Camb. scala in z $\mathcal{Z}[a^n x(n)] = X(a^{-1} z)$ $ROC = \{z : \frac{z}{a} \in R_x\}$

6) Convoluzione $\mathcal{Z}[x * y(n)] = X(z) Y(z)$ $ROC \supset (R_x \cap R_y)$

7) TFtd Se $\{|z| = 1\} \subseteq R_x$, $TFtd[x(n)](\omega) = \mathcal{Z}[x(n)](z)\Big|_{z = e^{j\omega}}$

8) Inversione se $\{|z| = \rho\} \subseteq R_x$, $x(n) = \rho^n \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\rho e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

9) Segnale a supporto finito se $\exists\, n_0, n_1 \in \mathbb{Z}$ tali che $n_0 \leq n_1$, $\forall n < n_0$ $x(n) = 0$, $\forall n > n_1$ $x(n) = 0$,

$$X(z) = x(n_0) z^{-n_0} + x(n_0+1) z^{-n_0-1} + \ldots + x(n_1) z^{-n_1} = z^{-n_0}\left(x(n_0) + x(n_0+1) z^{-1} + \ldots + x(n_1) z^{-n_1+n_0}\right)$$

$$= z^{-n_0} \cdot \tilde{X}(z^{-1})$$

dove $\tilde{X}$ è il polinomio di grado $n_1 - n_0$ con coefficienti $x(n_0), x(n_0+1), \ldots x(n_1)$: $\tilde{X}(s) = \sum_{k=0}^{n_1-n_0} x(n_0+k) s^k$

e la ROC è $\mathbb{C} - \{0\}$ (oppure $\mathbb{C}$ se $n_1 < 0$)

Funzione di Trasferimento di un LTI

Dato un LTI t.d. con risposta impulsiva h, la TZ di h, se esiste, è detta funzione di Trasferimento del sistema.

Nota 1 Tutti gli LTI con risposta impulsiva a supporto finito, detti anche FIR (finite impulse response) sono dotati di TZ, con forma $H(z) = z^{-n_0}\tilde{H}(z^{-1})$

Nota 2 Un FIR causale ha una FT nella forma $H(z) = \tilde{H}(z^{-1})$ cioè un polinomio nella variabile z^{-1}: $H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_N z^{-N}$

Nota 3 Se il sistema L_1 con RI h_1 è l'inverso di L_2 con RI h_2, cioè se $\forall x,\ h_2 * (h_1 * x) = x$, allora

$$H_2(z) = \frac{1}{H(z)}$$

(ammettendo che i due sistemi sono dotati di FT, il che è vero a meno di casi patologici)

Lemma Escluso il caso di un LTI ritardo $(y(n) = h_0 x(n-n_0))$, il sistema che inverte un FIR, se esiste, non può essere un FIR.

Sia infatti $H(z)$ la FT del FIR. Se $H(z)$ è un monomio, $H(z) = z^{-n_0} h_0$ l'inverso è $\overline{H}(z) = \frac{1}{h_0} z^{n_0}$ che è un FIR.

Altrimenti $H(z) = z^{-n_0} \tilde{H}(z^{-1})$ dove $\tilde{H}$ è un polinomio con almeno due potenze distinte. Allora $\bar{H}(z) = z^{n_0} \frac{1}{\tilde{H}(z^{-1})}$ ed è impossibile esprimere $1/\tilde{H}(z^{-1})$ come polinomio

5

Quindi escluso il caso banale (ritardo), per invertire un FIR è necessario un IIR (infinite impulse response)

Implementando gli LTI con convoluzione, il numero di operazioni necessario è proporzionale a N, supporto del FIR per ogni campione dell'uscita.

Se però abbiamo un IIR, $N \to \infty$ quindi è impossibile implementare gli IIR con la convoluzione

Questo sembra limitare molto l'applicabilità dei filtri numerici: solo i FIR sembrano implementabili

In realtà, esiste una sottoclasse di IIR che può essere implementata con un numero finito di operazioni e che include al suo interno i filtri inversi dei FIR.

Si tratta dei filtri ricorsivi

Filtri ricorsivi

Sia L un LTI discreto con R.I. h e tale che, per ogni segnale d'ingresso x, detta y l'uscita corrispondente, esistono due polinomi co-primi $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ tale che la coppia x, y soddisfa l'equazione alle differenze (EAD)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x(n-k) \qquad (1) \qquad \text{con } a_0 = 1$$

Tale LTI è detto filtro ricorsivo.

I filtri ricorsivi sono importanti perché:

- Sono un modello matematico utile per molti casi d'interesse pratico
- Sono più generali dei FIR, che ne sono un caso particolare
- Possono essere implementati con un numero finito di operazioni

Qual è la RI di un filtro ricorsivo?

Data un'equazione alle differenze, esistono più sistemi LTI che la soddisfano (come nel caso EDOLCC)

La FT di un filtro ricorsivo si ottiene facilmente applicando la TZ alla EAD:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$a(z^{-1}) Y(z) = b(z^{-1}) X(z)$$

$$Y(z) = \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})} X(z)$$

$$H(z) = \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})}$$

Stabile se la ROC contiene il cerchio unitario

Quindi è molto facile passare da EAD a H: basta usare i coefficienti a_k e b_k per scrivere una funzione razionale in z^{-1}

Ovviamente dobbiamo essere in una ROC quindi bisogna escludere i poli, cioè i valori di z che annullano il denominatore

Spesso si considera come ROC
quella corrispondente ad un segnale $h(n)$
causale, quindi l'esterno di un cerchio in $\mathbb{C}$

In particolare, se le radici di $e(\cdot)$ sono λ_i,
la ROC è $|z| > \max_i |\lambda_i^{-1}|$

Perché prendere h causale?
Perché esiste un algoritmo che permette d'implementare
il filtro ricorsivo, cioè di calcolare $h * x$
ma solo se h e x sono causali
oppure se h è causale e ℓ_1 (con errore di approssimazione che tende a zero

In altre parole:

(1) Nella pratica si ha a volte l'esigenza
di implementare un filtro ricorsivo
cioè la soluzione di un'EAD.

Esempi:
- inversione di filtri
- rimozione echo
- progetto filtri

(2) Trovare il caso in cui $a(z^{-1}) = 1$, (per cui $H(z) = b(z^{-1})$)
$H(z)$ non è un FIR, quindi
richiederebbe infinite operazioni per essere
implementato tramite convoluzione

(3) Usando l'algoritmo del filtro ricorsivo causale,
si può implementare l'EAD con un
numero finito di operazioni, ma il filtro
deve essere appunto causale

Algoritmo FRC filtro ricorsivo causale

Consideriamo il filtro ricorsivo causale associato a

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \qquad (a_0 = 1)$$

cioè $H(z) = \dfrac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})}$ causale

Allora sappiamo che $y = h * x$

Posto $x^c(n) = x(n)\,u(n)$, definiamo

il segnale $T(n)$ tramite l'algoritmo ricorsivo:

$$t(n) = \begin{cases} 0 & \forall n<0 \\ \sum_{k=0}^{M} b_k\, x^c(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k\, t(n-k) \end{cases} \qquad (2)$$

Si dimostra che:

1) Se $x(n) = x^c(n)$ cioè $x(n)=0\ \forall n<0$, allora

$y(n) = t(n)$

Ma $t(n)$ richiede solo $M+N$ operazioni per campione, non infinite!

2) Se $x(n) \neq x^c(n)$, allora, se

tutti i poli di $H(z)$ sono in modulo minori di 1

(condizione di stabilità del sistema)

si ha $\quad |y(n) - T(n)| < C a^n \xrightarrow[n]{} 0 \qquad |a|<1,\ C>0$

cioè $T(n)$ converge (rapidamente) alla

vera soluzione y

sempre con un numero finito di operazioni

Notiamo che l'algoritmo (2) per costruzione fornisce la soluzione causale dell'EAD.

Il sistema associato sarà stabile se e solo se tutti i poli di $H(z)$ sono a modulo minore di uno. Infatti la ROC è $|z| > \max_i |\lambda_i^{-1}|$ dove λ_i^{-1} è l'i-esimo polo (λ_i è la radice del polinomio $a(z)$, ma $H(z) = \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})}$)

Usando l'algoritmo (2) è possibile implementare un filtro a partire da:

- EAD → Troviamo $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$
- posizione di zeri e poli → determiniamo i polinomi
- FT: numeratore e denominatore danno $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$