TRASFORMATA DI LAPLACE (TL)

La TL è utile in problemi in cui la TF non è sufficiente, come lo studio di EDOLCC con sistema LTI causale associato non stabile

DEFINIZIONI

Il segnale $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è detto ammettere TL se e solo se

$\exists\, s_0 \in \mathbb{C} \;:\; e^{-s_0 t} \cdot x(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

La ROC (region of convergence) di un segnale $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è l'insieme di tutti gli $s \in \mathbb{C}$ tali che $e^{-st} \cdot x(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Se il segnale x ammette TL, chiamiamo R la sua ROC
R è non vuoto per definizione di segnale che ammette TL.
Allora possiamo definire una funzione su R:

$$X : s \in \mathbb{R} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}\, x(t)\, dt$$

Tale funzione $X(s)$ è detta Trasformata di Laplace del segnale x

Lemma : Struttura della ROC

Dato il segnale x, se $s_0 \in R$ (ROC di x), allora posto $\sigma_0 = Re(s_0)$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $\sigma_0 + j\omega \in R$

DIM. Per definizione di ROC, $|e^{-s_0 t} \cdot x(t)|$ è integrabile su $\mathbb{R}$.

Ora,
$$|e^{-s_0 t} x(t)| = |e^{-(\sigma_0 + j\omega_0)t} x(t)| = |e^{-\sigma_0 t}| \cdot \underbrace{|e^{-j\omega_0 t}|}_{=1} \cdot |x(t)|$$
$$= |e^{-\sigma_0 t}| \cdot |x(t)| \quad \text{è integrabile}$$

Inoltre
$$|e^{-(\sigma_0 + j\omega)t} \cdot x(t)| = |e^{-\sigma_0 t}| \overbrace{|e^{-j\omega t}|}^{=1} \cdot |x(t)| = |e^{-\sigma_0 t}| |x(t)|$$

è quindi anche integrabile, quindi $\sigma_0 + j\omega \in R$

In altre parole, $\forall s_0 \in R$, tutta la retta $Re(s_0) + j\omega$ (al variare di ω) appartiene alla ROC

Quindi la ROC di un segnale che ammette TL sarà sempre l'unione di rette parallele all'asse immaginario nel piano di Gauss

Caso della funzione gradino

Sia $x(t) = u(t)$. È chiaro che $e^{-s_0 t} x(t)$ è assolutamente integrabile se e solo se $e^{-\sigma_0 t} x(t)$ lo è ($\sigma_0 = Re(s_0)$). Questo è vero qualunque sia x, non solo u.

Nel caso del gradino $e^{-\sigma_0 t} u(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma_0 > 0$

Questo vuol dire che la ROC di $u(t)$ è $\{s : Re(s) > 0\}$

In breve scriveremo $R = Re(s) > 0$

Se $s \in R$, possiamo calcolare $X(s)$ per il gradino:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} u(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt =$$

$$= \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{+\infty} = 1/s$$

in quanto $|e^{-st}| = |e^{-\sigma_0 t}| \cdot |e^{-j\omega_0 t}| = e^{-\sigma_0 t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

Quindi, $\forall s : Re(s) > 0$, $X(s) = 1/s$

Consideriamo ora il segnale $x(t) = -u(-t)$

Per la ROC bisogna considerare l'integrabilità di

$|e^{-st} x(t)| = |e^{-st} u(-t)| = e^{-\sigma_0 t} \cdot u(-t)$

che è integrabile su $\mathbb{R}$ se e solo se $\sigma_0 < 0$

Quindi $R = Re(s) < 0$

La TL di $x(t) = -u(-t)$ è, $\forall s : Re(s) < 0$,

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \cdot [-u(-t)] dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{s} \right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s}$$

perché in questo caso $e^{-\sigma_0 t} \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$

La differenza tra il primo ed il secondo caso è la <u>ROC</u>. I segnali $x(t) = u(t)$ e $y(t) = -u(-t)$ hanno la stessa forma della TL, ma hanno due ROC diverse

<u>Lemma</u> <u>Linearità della TL</u>

Siano x e y due segnali che ammettono TL.
Allora, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ il segnale $z = \alpha x + \beta y$ ammette TL se le ROC di x e y, indicate con R_x e R_y hanno intersezione non nulla (condizione <u>sufficiente</u> ma non necessaria).

Se $R_x \cap R_y \neq \emptyset$, $\forall s \in R_x \cap R_y$, $Z(s) = \alpha X(s) + \beta Y(s)$ (1)

Infatti $|e^{-st} z(t)| \leq |\alpha| |e^{-st}| |x(t)| + |\beta| |e^{-st}| |y(t)|$
che è integrabile su $\mathbb{R}$ perché lo è ognuno degli addendi
Quindi $s \in R_z$ e, per la linearità dell'integrale si ha la (1)

<u>ROC di segnali causali</u>

Un segnale x è detto <u>causale</u> se ha supporto solo per $t \geq 0$: quindi $x(t) = x(t) \cdot u(t)$
Un segnale x è invece <u>anticausale</u> se $x(t) = x(t) \cdot u(-t)$

Lemma La ROC di un segnale causale è un "semipiano destro" del piano di Gauss, inclusi i casi limite $R = \mathbb{C}$ e $R = \emptyset$ 5

In altre parole, esiste $s_0 \in \mathbb{C}$: $\forall s : Re(s) > Re(s_0)$, $s \in R$

DIM. Se $R = \mathbb{C}$ oppure $R = \emptyset$ non c'è niente da dimostrare. Se $R \neq \emptyset$ e $s_0 \in R$, sia $\sigma_0 = Re(s_0)$ e sia s tale che $\sigma = Re(s) > \sigma_0$. Allora

$$|e^{-st} \cdot x(t)| = e^{-\sigma t} \cdot |x(t)| = e^{-\sigma t} \cdot |x(t)| \cdot u(t) \leq e^{-\sigma_0 t} |x(t)| u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-st} \cdot x(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma_0 t} |x(t)| \, u(t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-\sigma_0 t} x(t)| dt < +\infty$$

CVD

Il punto chiave è: siccome $x(t) = x(t) \cdot u(t)$, allora

$e^{-\sigma t} \cdot |x(t)| \leq e^{-\sigma_0 t} \cdot |x(t)|$: perché per $t<0$ sono entrambi nulli e per $t \geq 0$ $\quad e^{-\sigma t} < e^{-\sigma_0 t}$ (perché $\sigma > \sigma_0$)

Similmente si può provare il seguente lemma:

Lemma la ROC di un segnale anti-causale è un "semipiano sinistro" del piano di Gauss, inclusi i casi limite $R = \emptyset$ e $R = \mathbb{C}$

<u>ROC di un segnale non causale</u>

Se $x(t)$ è non nullo per almeno un valore di $t<0$ ed almeno un valore di $t>0$, la sua ROC è una "striscia verticale" del piano di Gauss, cioè $R_x = \{ s \in \mathbb{C} : \; Re(s) \in (\sigma_1, \sigma_2) \}$, inclusi i casi limite

$R_x = \emptyset$, R_x semipiano sinistro (cioè $\sigma_1 = -\infty$)

R_x semipiano destro (cioè $\sigma_2 = +\infty$) e $R_x = \mathbb{C}$ ($\sigma_1 = -\infty$ e $\sigma_2 = +\infty$)

DIM. Possiamo scrivere $x(t) = x(t)\,(u(t) + u(-t)) =$

$$= x(t)\,u(t) + x(t)\,u(-t) = x_C(t) + x_{NC}(t)$$

dove $x_C(t) = x(t)\,u(t)$ [risp., $x_{NC}(t) = x(t)\,u(-t)$] è detto

parte causale [risp. non causale] di x.

Allora, per il lemma sulle ROC di segnali causali e non causali, $R_{x_C} = Re(s) > \sigma_1$ e $R_{x_{NC}} = Re(s) < \sigma_2$

Se $\sigma_1 < \sigma_2$ (inclusi i casi limite $\sigma_1 = +\infty$ e $\sigma_2 = +\infty$),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-st} x(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{0} |e^{-st} x(t)|\,dt + \int_{0}^{+\infty} |e^{-st} x(t)|\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-st} x_{NC}(t)|\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-st} x_C(t)|\,dt$$

L'integrale a primo membro converge se e solo se convergono entrambi gli integrali a secondo membro, ma ciò è possibile se e solo se $s \in R_{x_C} \cap R_{x_{NC}}$ che è non vuoto se e solo se

$\sigma_1 < \sigma_2$

Struttura della ROC di un generico segnale $x(t)$

Per quanto detto, la ROC di un generico segnale x può assumere solo le seguenti strutture:

1) $R_x = \mathbb{C}$

2) $R_x = \operatorname{Re}(s) > \sigma$ (semipiano destro)

3) $R_x = \operatorname{Re}(s) < \sigma$ (semipiano sinistro)

4) $R_x = \sigma_1 < \operatorname{Re}(s) < \sigma_2$ (striscia)

5) $R_x = \emptyset$

Per segnali causali, sono possibili solo i casi 1, 2 e 5

Per segnali anticausali, sono possibili solo i casi 1, 3 e 5

TL e TFtc

Lemma. Se x è dotato di TL e se $j\omega \in R_x$ (per ω qualsiasi) allora x ammette anche TFtc e si ha:

$$\mathcal{F}[x, t \to \omega] = \mathcal{L}[x](s)\Big|_{s = j\omega}$$

dove abbiamo usato la notazione $\mathcal{L}[x](s)$ per indicare la TL valutata in s per il segnale x

La dimostrazione è immediata dalle definizioni, osservando che $s = j\omega \in R_x \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$.

Similmente, $\forall s \in R_x$, posto $\sigma = Re(s)$ e $\omega = Im(s)$, si ha

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} x(t)\, dt = \mathcal{F}\left(e^{-\sigma t} x(t)\right)(\omega)$$

Questo risultato permette di ottenere la formula d'inversione della TL:

$$x(t) = e^{\sigma t} \cdot e^{-\sigma t} x(t) = e^{\sigma t} \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{L}[x](s)\Big|_{s=\sigma+j\omega} \quad \omega \to t \right] =$$

$$= \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

dove l'integrando è $X(s) = \mathcal{L}[x](s)$

<u>Controesempio</u> Se $x(t) = u(t)$, l'asse immaginario non appartiene alla ROC e infatti

$$\mathcal{L}[u(t)](s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega} \neq \mathcal{F}(u(t))(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Invece se $\sigma > 0$, $\mathcal{F}(e^{-\sigma t} x(t))(\omega) = \frac{1}{\sigma + j\omega} = \frac{1}{s} = \mathcal{L}[x](s)$

Esempi di calcolo

1) $x(t) = u(t) \Rightarrow X(s) = 1/s$ e $R_x = Re(s) > 0$

2) $x(t) = -u(-t) \Rightarrow X(s) = 1/s$ e $R_x = Re(s) < 0$

3) $x(t) = e^{at} u(t)$, $a \in \mathbb{C}$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} e^{at} u(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-a)t} u(t)\, dt$$

$$= \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}$$

ma converge se e solo se $Re(s-a) > 0$ cioè $Re(s) > Re(a)$

4) $x(t) = -e^{at} u(-t)$, $a \in \mathbb{C}$

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s-a)t}\, dt = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s-a}$$

Ma la ROC questa volta è $Re(s) < Re(a)$

5) $x(t) = \delta(t - t_0)$ $\quad X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \delta(t-t_0)\, dt = e^{-st_0}$, $R = \mathbb{C}$

6) $x(t) = e^{-a|t|}$

$$x(t) = e^{-at} u(t) + e^{at} u(-t)$$

Applicando la linearità, $X(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{-2a}{s^2 - a^2}$

La ROC è l'intersezione di $Re(s) > -Re(a)$ e $Re(s) < Re(a)$

Quindi la ROC è non vuota se e solo se $Re(a)>0$

7) $x(t) = \operatorname{sen} \omega_0 t \, u(t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)u(t)$ Le ROC dei due esponenziali sono entrambe $Re(s)>0$

$$X(s) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{s+j\omega_0}\right) = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \quad , \; R = Re(s)>0$$

8) $x(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$

$$X(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0}\right) = \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \qquad ROC : Re(s)>0$$

Proprietà TL — Tutte le dim. sono relativamente semplici

Sia $X(s) = \mathcal{L}(x)(s)$

1) Coniugio $\quad \mathcal{L}(\bar{x})(s) = \bar{X}(\bar{s}) \qquad R = R_x$

2) Traslazione $\quad \mathcal{L}(U_\beta[x])(x) = e^{-\beta s} X(s) \qquad R = R_x$

3) Modulazione $\quad \mathcal{L}(e^{s_0 t} x(t))(s) = X(s-s_0) \qquad R = R_x + Re(s_0)$

4) Cambio scala $\quad \mathcal{L}(x(at))(s) = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad R = aR_x$

5) Convoluzione $\quad \mathcal{L}(x * y)(s) = X(s)Y(s) \qquad R \supset R_x \cap R_y$

6) Derivata in s

$$\mathcal{L}(t\,x(t))(s) = -\frac{d}{ds} X(s)$$

$$\mathcal{L}(t^n x(t))(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} X(s) \qquad R = R_x$$

7) Integrale $\quad \mathcal{L}\left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right)(s) = \frac{1}{s} X(s) \qquad R \supset (R_x \cap Re(s)>0)$

8) Derivata $\quad \mathcal{L}\left(\frac{d^n}{dt^n} x(t)\right)(s) = s^n X(s) \qquad R \supset R_x$

Tabella Trasformate di Laplace   Vd. libro

Ricordiamo $\mathcal{L}(t^k x(t))(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} X(s)$ (ROC: $Re(s)>0$)

Quindi $\mathcal{L}(t^k u(t))(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{s} = (-1)^k \cdot (-1)^k \frac{k!}{s^{k+1}} = \frac{k!}{s^{k+1}}$

Applicando la modulazione con $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{L}(t^k e^{\lambda t} u(t))(s) = \frac{k!}{(s-\lambda)^{k+1}} \qquad Re(s) > Re(\lambda)$$

equivalente a $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-\lambda)^k}\right)(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda t} u(t)}$ $Re(s)>Re(\lambda)$

È la TL inversa di un fratto semplice (R1)

Invece, se $Re(s) < Re(\lambda)$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-\lambda)^k}\right) = -\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda t} u(-t)$

La TLI di un fratto semplice permette di invertire

una frazione propria di polinomi

Ma bisogna fare attenzione alla ROC

Sia $W(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ con: ∂b (grado di $b(s)$) $= m$
$\partial a = n$

e con $n > m$
significa frazione propria

Siano $\lambda_1, \dots \lambda_r$ le radici distinte di $Q(s)$

ognuna con molteplicità n_i

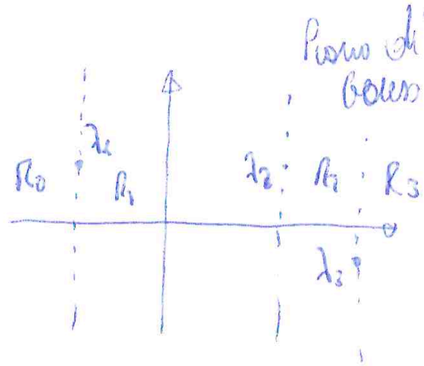
La decomposizione in fratti semplici di W è

$$\boxed{W(s) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{n_i - 1} \frac{A_{i,k}}{(s-\lambda_i)^{k+1}}}$$

Per trovare la TLI di W bisogna

1) Calcolare le singole TLI di $\frac{1}{(s-\lambda_i)^{k+1}}$

2) Determinare i coefficienti $A_{i,k}$



Per 1) bisogna fissare la ROC
e ciò dipende dal problema.

Per esempio, se cerchiamo una soluzione <u>causale</u> la ROC è $Re(s) > \max_i Re(\lambda_i)$

Se cerchiamo una soluzione <u>stabile</u>, la ROC deve includere $Re(s)=0$

Una volta fissata la ROC, la TLI di $\frac{1}{(s-\lambda_i)^{k+1}}$ è $\pm \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_i t} u(\pm t)$

con il segno + se λ_i è a sx della ROC, e il segno − se λ_i è a destra

Per 2) vedremo qualche esempio

2.1) $W(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2}$

Passo 1: Trovare le radici: $(s^2 - s - 2) = (s+1)(s-2)$

$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 2$ e $\boxed{W(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s-2}}$

Le ROC possibili sono: $Re(s) < -1$

$-1 < Re(s) < 2$ ⇒ soluzione stabile perché $Re(s) = 0 \subset ROC$

$Re(s) > 2$ ⇒ soluzione causale perché tutte le radici sono a sx

La trasformata inversa è quindi

$$\pm A_1 e^{-t} u(\pm t) \pm A_2 e^{2t} u(\pm t)$$

La soluzione causale si ha per ROC: $Re(s) > 2$ ⇒

$$W(t) = A_1 e^{-t} u(t) + A_2 e^{2t} u(t)$$

La soluzione stabile si ha per ROC $-1 < Re(s) < 2$

$$\Rightarrow W(t) = A_1 e^{-t} u(t) - A_2 e^{2t} u(-t)$$

qui ci sono i segni meno perché sono a sx della radice 2

Importante confrontare questo risultato con quanto ottenuto nella ricerca della soluzione di $y'' - y' - 2y = x$

2.2) Calcolo di A_1 e A_2

Partiamo da $W(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s-2}$

Si ha: $A_1 = (s+1)W(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s-2}\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3}$

$$A_2 = (s-2)W(s)\Big|_{s=2} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=2} = \frac{1}{3}$$

Quindi $A_1 = -1/3$, $A_2 = 1/3$

soluzione causale: $w(t) = -\frac{1}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$

soluzione L^1 (cioè "stabile") $w(t) = -\frac{1}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$

Nel seguito ci interesserà cercare quasi sempre la soluzione causale

Essa sarà anche L^1 se e solo se tutte le λ_i hanno parte reale strettamente negativa

Caso con coefficienti reali e radici complesse coniugate

Se ci sono 2 radici c.c. : $\lambda_1 = \sigma + j\omega$ e $\lambda_2 = \sigma - j\omega$

invece di considerare i fratti semplici : $\frac{A_1}{s-\lambda_1} + \frac{A_2}{s-\lambda_2}$ (*)

possiamo usare direttamente il fratto $\frac{B(s-\sigma)+C\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$ (**)

la cui TL1 (causale) è $u(t)e^{\sigma t}(B\cos\omega t + C\sin\omega t)$
(vedere Tabelle TL)

DIM. (opzionale) Mostriamo che (*) e (**) sono equivalenti

$$\frac{A_1}{s-\lambda_1} + \frac{A_2}{s-\lambda_2} = \frac{A_1}{s-\sigma-j\omega} + \frac{A_2}{s-\sigma+j\omega} = \frac{A_1 s - A_1\sigma + jA_1\omega + A_2 s - A_2\sigma - A_2 j\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$$

$$= \frac{(A_1+A_2)(s-\sigma) + j(A_1-A_2)\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} = \frac{B(s-\sigma)+C\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$$

$B = A_1 + A_2$ e $C = j(A_1 - A_2)$

Se $a(s)$ è a coeff. reali, si mostra che $A_2 = \bar{A}_1 \Rightarrow B, C \in \mathbb{R}$

Esempio

$$W(s) = \frac{5s^2+10s+5}{s^3+2s^2+5s}$$

$$d(s) = s(s^2+2s+5) \qquad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2j \quad \begin{cases} \sigma = -1 \\ \omega = 2 \end{cases}$$

$$\lambda_3 = 0$$

$$W(s) = \frac{5s^2+10s+5}{s(s+1-2j)(s+1+2j)} = \frac{A}{s} + \frac{B(s+1)-2C}{(s+1)^2+4}$$

la TLI cercata è $\quad w(t) = A\,u(t) + e^{-t}u(t)\left(B\cos 2t + C\sin 2t\right)$

Ora troviamo A, B e C

$$A = sW(s)\Big|_{s=0} = \frac{5}{(1+2j)(1-2j)} = \frac{5}{5} = 1$$

Due modi per trovare B e C

1) Trovare $\quad W(s) = \frac{A}{s-\lambda_1} + \frac{A_2}{s-\lambda_2} + \frac{A_3}{s-\lambda_3}$ e poi $B = A_1 + A_2$

$C = j(A_1 - A_2)$

$$A_1 = (s+1-2j)W(s)\Big|_{s=-1+2j} = \frac{5s^2+10s+5}{s(s+1+2j)}\Big|_{s=-1+2j} = \frac{5(-1+2j)^2+10(-1+2j)+5}{(-1+2j)(-1+2j+1+2j)}$$

$$= \frac{5(1-4-4j)-10+20j+5}{-4j-8} = \frac{-15-20j-5+20j}{-4(2+j)} = \frac{5}{2+j} = \frac{5(2-j)}{4+1} = 2-j$$

$$A_2 = (s-1-2j)W(s)\Big|_{s=-1-2j} = \dots = 2+j$$

$\Rightarrow \quad B = 4 \quad$ e $\quad C = -2j \cdot j = 2$

Oppure, ricavo $W(s) = \frac{1}{s} + \frac{B(s+1)+2C}{(s+1)^2+4}$

calcoliamo $W(1)$ e $W(-1)$

$$W(1) = \frac{5\cdot 1 + 10 + 5}{1+2+5} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \qquad \text{(dalla def di } W\text{)}$$

$$W(1) = 1 + \frac{B\cdot 2 + 2C}{4+4} = \frac{B+C}{4} + 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{B+C}{4} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$W(-1) = \frac{5-10+5}{-1+2\cancel{+}5} = 0$$

$$\Rightarrow +\frac{1}{2}C - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

$$W(-1) = -1 + \frac{+2C}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{B+2}{4} + 1 = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{4} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad B = 4$$

Caso $W(s) = q(s) + \frac{b_0(s)}{a(s)} = \sum_{k=0}^{m-n} q_k s^k + \frac{b_0(s)}{a(s)}$

In tal caso il contributo di $q(s)$ è $q(t) = \sum_{k=0}^{m-n} q_k \delta^{(k)}(t)$ (Roc: $\mathbb{C}$

mentre la frazione propria $\frac{b_0(s)}{a(s)}$ si inverte come visto prima

Trasformata di Laplace monolatera (TL+)

La TL+ di un segnale $x(t)$ è definita come

$$X_+(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

la ROC è sempre un semipiano destro perché la TL+ è la TL di un opportuno segnale causale

Note : 1) L'estremo 0^- serve a includere nell'integrale un eventuale $\delta(t)$

2) Se $\forall t > 0 \quad x_1(t) = x_2(t)$, allora $X_{1+}(s) = X_{2+}(s)$

ma non necessariamente $X_1(s) = X_2(s)$

3) Se $x(t) = 0 \; \forall t < 0$ (cioè $x(t)$ è causale)

Allora $X_+(s) = X(s)$

quindi la Tabella delle TL causali vale anche per la TL+

4) Le proprietà della TL+ sono le stesse della TL con due eccezioni :

4.1) La Traslazione si può applicare se x è causale e $t_0 > 0$. In tal caso

$$\mathcal{L}_+(x(t-t_0))(s) = X_+(s) \cdot e^{-t_0 s}$$

4.2) Regola della derivata $\mathcal{L}_+\left(\frac{d}{dt} x(t)\right)(s) = s X_+(s) - x(0^-)$

e $$\mathcal{L}^+\left(\frac{d^k}{dt^k} x(t)\right) = s^k X_+(s) - \sum_{h=0}^{k-1} s^h \; x^{(k-1-h)}(0^-)$$

Applicazioni al problema di Cauchy Causale

Il PCC era definito da:
$$\begin{cases} a(D)(y) = b(D)(x) \\ x(t) = 0 \quad \forall t<0 \\ y(0^-) = y_0, \ y'(0^-) = y_1, \dots y^{(n-1)}(0^-) = y_{n-1} \end{cases}$$

Applichiamo la TL+ all'EDOLCC:

$$\mathcal{L}^+(a(D)(y)) = \mathcal{L}^+(b(D)(x))$$

perché $x^{(k)}$ è causale e quindi $\mathcal{L}_+(x^{(k)}) = \mathcal{L}(x^{(k)})$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{L}_+(y^{(k)}) = \sum_{k=0}^{m} b_k \mathcal{L}^+(x^{(k)}) = \sum_{k=0}^{m} b_k \mathcal{L}(x^{(k)})$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left[s^k Y_+(s) - \sum_{l=0}^{k-1} s^l y_{k-l-1} \right] = \sum_{k=0}^{m} b_k s^k X(s)$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k s^k \, Y_+(s) - \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{l=0}^{k-1} y_{k-l-1} \cdot s^l = b(s) X(s)$$

è $a(s)$

$$Y_+(s) = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{l=0}^{k-1} y_{k-l-1} \cdot s^l}{a(s)} + \frac{b(s)}{a(s)} \cdot X(s)$$

$$Y_+(s) = Y_l(s) + Y_f(s)$$

$Y_l(s)$ è una funzione razionale fratta

$Y_f(s) = H_+(s) \cdot X(s)$ e $H_+(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)}$ ed è causale

Quindi è facile trovare la TL+ di Y:

è la somma di $Y_e(s)$ e $H_+(s) \cdot X(s)$

Come s'inverte la TL+ ?

con ROC semipiano destro per trovare la TLI causale

In pratica si inverte $Y_+(s)$ come se fosse una TL bilatera, ma il risultato trovato vale solo per $t>0$

cioè $\mathcal{L}^{-1}(Y_+(s))(t) = y(t) \cdot u(t)$

DIM sia $v(t) = y(t) \cdot u(t)$

Allora $V_+(s) = V(s)$ (perché V è causale)

e inoltre $V_+(s) = Y_+(s)$ (perché $v(t) = y(t)$ $\forall t>0$)

Allora $\mathcal{L}^{-1}(Y_+(s)) = \mathcal{L}^{-1}(V_+(s)) = \mathcal{L}^{-1}(V(s)) = y(t)u(t)$

Quindi per risolvere il PCC basta trovare le TLI delle funzioni razionali $Y_e(s)$ e $H(s)$, e poi la convoluzione tra h_+ e x. Se possibile, si può anche direttamente invertire $H(s) \cdot X(s)$.

Ecco perché è così importante studiare l'inversione della TL nel caso di funzioni razionali

21 | Sistema LTI causale associato a una EDOLCC

Ricordiamo che in un PCC con condizioni iniziali nulle, la relazione tra ingresso e uscita è $y = h_+ * x$

quindi è un LTI

Il problema è $\begin{cases} a(D)(y) = b(D)(x) \\ y(0^-) = 0, \dots \; y^{(n-1)}(0^-) = 0 \end{cases}$

Siccome tutti i segnali coinvolti sono causali, la TL e la TL+ coincidono.

Dalla EDOLCC si ha, applicando la TL: $a(s)Y(s) = b(s)X(s)$

Allora, nel semipiano destro, $Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} X(s)$

$Re(s) > \max_i Re(\lambda_i)$

Allora $H_+(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ $\quad$ RoC: $Re(s) > \max_i Re(\lambda_i)$

Effettuando la divisione tra polinomi:

$$H_+(s) = q(s) + \frac{b_0(s)}{a(s)} \qquad q(s) = 0 \text{ se } m < n$$

$$\Rightarrow h_+(t) = \sum_{k=0}^{m-n} q_k \delta^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{n_i - 1} \frac{A_{i,k}}{k!} t^k e^{\lambda_i t} u(t)$$

Per la stabilità, non ci devono essere derivate di δ: quindi $\boxed{n \geq m}$

e la RoC deve comprendere $Re(s) = 0 \iff \boxed{\forall i,\ Re(\lambda_i) < 0}$

Sono i condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità

Esempio

Sia $H(s) = \frac{1}{s^2-s}$ la funzione di Trasf. di un sistema causale

1) scrivere l'eq. diff. associata
2) Dire se il sistema è stabile
3) Calcolare $h(t)$
4) Calcolare l'ingresso che genera l'uscita $y(t) = \sin(t)u(t)$

1) $y'' - y' = x$

2) No, perché $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$ radici a parte reale non negativa

3) $H(s) = \frac{1}{s^2-s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-1} = \frac{1}{s(s-1)}$ ROC $Re(s) > 1$

$A_1 = sH(s)\Big|_{s=0} = -1$

$\Rightarrow h(t) = u(t)\left(-1 + e^t\right)$

$A_2 = (s-1)H(s)\Big|_{s=1} = \frac{1}{1} = 1$

4) $Y(s) = \frac{1}{s^2+1} = H(s)X(s) = \frac{1}{s^2-s}X(s)$ ROC semipiano destro

$X(s) = \frac{s^2-s}{s^2+1} = \frac{s^2+1-1-s}{s^2+1} = 1 - \frac{s+1}{s^2+1} = 1 - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}$

Dalle Tabelle: $x(t) = \delta(t) - u(t)\cos t - u(t)\sin(t)$

Esempio Soluzione PCC

Si consideri il PCC:

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = x & \forall t > 0 \\ y(0^-) = 3 \quad y'(0^-) = -5 \\ x(t) = 2u(t) \end{cases}$$

Calcoliamo la TL+ dell'EDOLCC applicando la regola della derivata: $\mathcal{L}_+[y^{(k)}(t)] = s^k Y(s) - s^{k-1} y(0^-) + -s^{k-2} y'(0^-) - \dots - y^{(k-1)}(0^-)$

Quindi

$$\mathcal{L}^+[y''(t)] = s^2 Y(s) - s y(0^-) - y'(0) = s^2 Y(s) - 3s + 5$$

$$\mathcal{L}^+[y'(t)] = s Y(s) - y(0^-) = s Y(s) - 3$$

$$s^2 Y(s) - 3s + 5 + 3s Y(s) - 9 + 2 Y(s) = X(s)$$

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = (3s + 4) + X(s)$$

$$Y(s) = \frac{3s+4}{s^2+3s+2} + \frac{1}{s^2+3s+2} \cdot X(s)$$

$$Y_e(s) = \frac{3s+4}{s^2+3s+2} \qquad Y_f(s) = H_f(s) X(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} \cdot \frac{2}{s}$$

Le risposte libera e forzata si ottengono per decomposizione in fratti semplici

Osserviamo che: $\begin{cases} H(s) = 1/Q(s) \Rightarrow m=0 < n=2 \\ Q(s) = s^2+3s+2 \end{cases}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

Il sistema causale associato è stabile

Decomponendo H, Y_e, Y_f si ottengono la risposta impulsiva, la risposta libera e la risposta forzata:

1) $$H(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$A = \left.\frac{1}{s+2}\right|_{s=-1} = 1 \qquad B = \left.\frac{1}{s+1}\right|_{s=-2} = -1$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$h(t) = u(t) \cdot \left(e^{-t} - e^{-2t} \right)$$

2) $$Y_e(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = \left.\frac{3s+4}{s+2}\right|_{s=-1} = \frac{1}{1} = 1 \qquad B = \left.\frac{3s+4}{s+1}\right|_{s=-2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$y_e(t) = \left(e^{-t} + 2e^{-2t}\right)u(t) \qquad \forall t > 0$$

3) $$Y_f(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = \left.\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = 1 \qquad B = \left.\frac{2}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = -2 \qquad C = \left.\frac{2}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = 1$$

$$y_f(t) = u(t)\cdot\left(1 - 2e^{-t} + e^{-2t}\right)$$

4) $$y(t) = y_e(t) + y_f(t) = u(t)\left(1 - 2e^{-t} + e^{-2t} + e^{-t} + 2e^{-2t}\right)$$

$$= u(t)\left(1 - e^{-t} + 3e^{-2t}\right)$$