$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f(x,y)$

derivate parziali di f

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$$

per calcolarla tengo y fisso (come fosse un parametro) e derivo rispetto a x

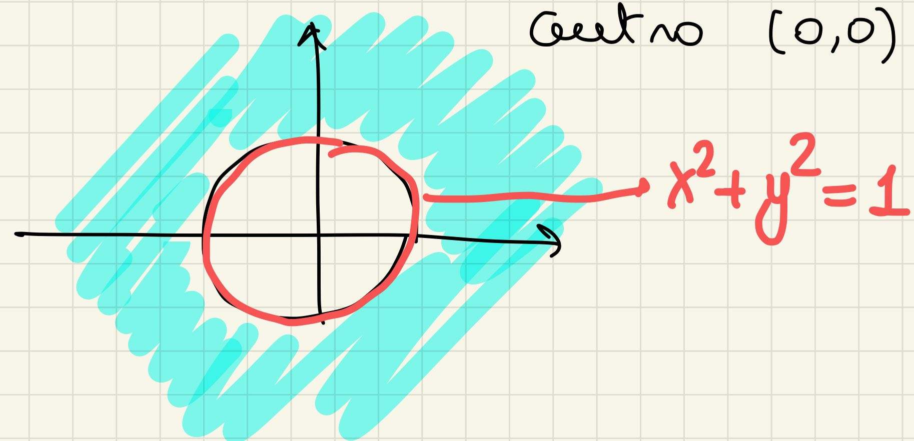
$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h}$$

per calcolarla fisso x (lo considero un parametro) e derivo rispetto a y.

Es

$$\boxed{f(x,y) = \lg\left(x^2+y^2-1\right)}$$

$D = \{ (x,y) \quad x^2+y^2-1>0 \}$ = esterno della circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1



$$f(x,y) = \lg(x^2+y^2-1) \qquad D = \{(x,y) \quad \underbrace{x^2+y^2-1>0}\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}\cdot(2x+0+0) = \frac{2x}{x^2+y^2-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}\cdot(0+2y+0) = \frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

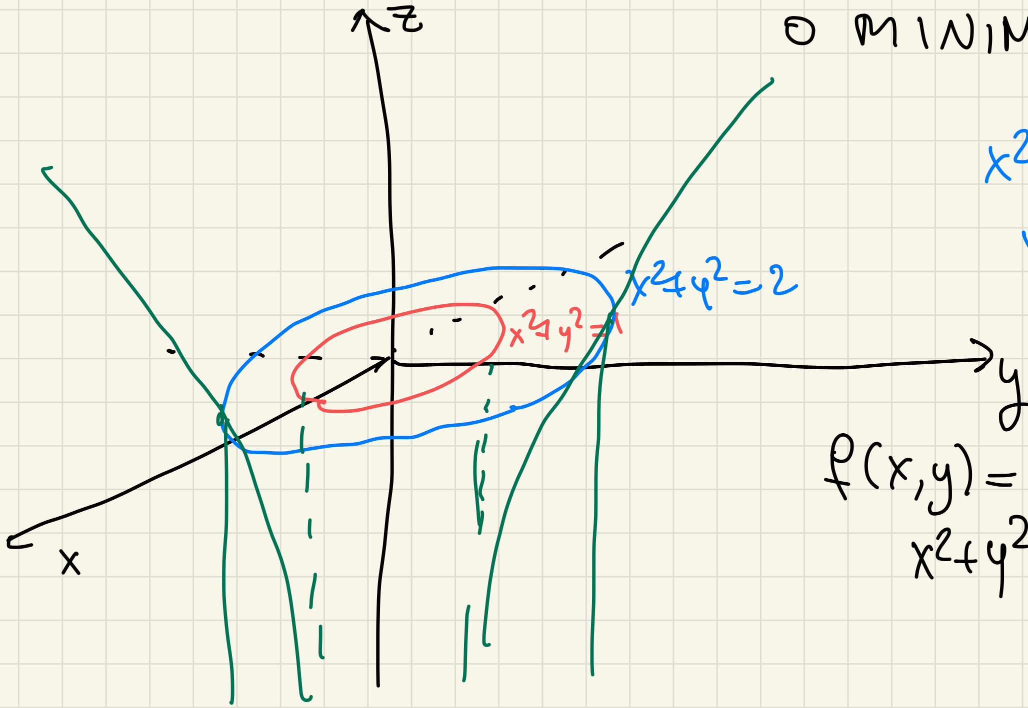
PUNTI CRITICI : punti del DOMINIO in cui si annullano contemporaneamente le due derivate parziali

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{\cancel{x^2+y^2-1}} = 0 \\ \dfrac{2y}{\cancel{x^2+y^2-1}} = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad (0,0) \notin D}$$

NON E' PUNTO CRITICO

$f(x,y) = \lg(\underbrace{x^2+y^2-1})$ non ha pti critici

(cioè non ha candidati pti di massimo o minimo → NON HA PUNTI DI MASSIMO O MINIMO)



$x^2+y^2-1=1$

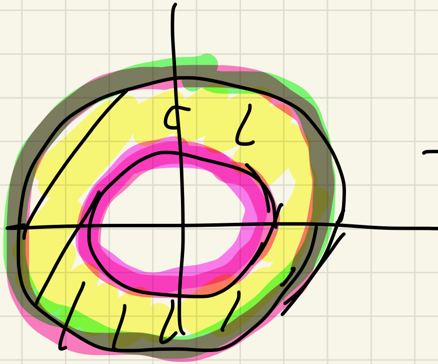
$x^2+y^2=2$

$f(x,y) = \lg(1) = 0$

$x^2+y^2=2$

$$f(x,y) = \arcsin\left(\underbrace{2 - \cancel{x}^2 - y^2}\right)$$

$$D = \{ 1 \le x^2 + y^2 \le 3 \}$$



$$-1 \le 2 - x^2 - y^2 \le 1$$

$$-3 \le -x^2 - y^2 \le -1$$

Invece del è
(0,0)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(2-x^2-y^2)^2}} \cdot (0 - 2x + 0) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(2-x^2-y^2)^2}} \cdot (0 + 0 - 2y) = 0 \end{cases}$$

$(0,0) \notin D$

NON È PUNTO CRITICO

$$\begin{cases} \dfrac{-2x}{\sqrt{1-(2-x^2-y^2)^2}} = 0 \\ \dfrac{-2y}{\sqrt{1-(2-x^2-y^2)^2}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Es $f(x,y) = 2x^2 + 3xy - y^3$

$\downarrow$ PUNTI CRITICI ~~sono~~

$$\boxed{(0,0) \qquad \left(\frac{9}{16}, -\frac{3}{4}\right)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + 3y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Per capire la "natura" dei pti critici studio le derivate seconde

(cioè se i pti critici sono pti di massimo o di minimo)

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) \qquad f''(x) = (f'(x))'$

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\downarrow$ ho 2 derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

(che sono ancora funzioni di 2 variabili)

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ come funzione di 2 variabili

è la derivo una volta rispetto alla x e una volta rispetto alla y

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)$$

DERIVATA SECONDA di f fatta 2 volte rispetto a x

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) \rightarrow$$

derivata seconda di f fatta la prima volta rispetto a x e la seconda rispetto a y.

es.

$$f(x,y) = 2x^2 + 3xy - y^3$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \underbrace{4x} + 3y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = 4 \cdot 1 + 0 = 4$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) = 0 + 3 = 3}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ come funzione di 2 variabili la derivo una volta rispetto alla x e una volta rispetto alla y

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)$$

derivata seconda di f fatta prima rispetto a y e poi rispetto a x

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$$

→ derivata seconda di f fatta 2 volte rispetto a y.

Ho 2 derivate prime (derivata rispetto a x e derivata rispetto a y)

e 4 derivate seconde

1. derivata fatta 2 volte rispetto a x tenendo y costante
2. derivata fatta prima rispetto a x e poi rispetto a y

=

3. derivata fatta prima rispetto a y e poi rispetto a x
4. derivata fatta 2 volte rispetto a y -

Se f è Regolare (continua e le sue derivate parziali sono continue e le sue derivate seconde sono continue)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)}$$

(per fare le derivate seconde, ordine in cui derivo non è importante)

in realtà le derivate seconde sono "3".

ES $f(x,y) = 2x^2 + 3xy - y^3$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \underbrace{3x} - 3y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 - 3 \cdot 2y = -6y$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

MATRICE delle derivate SECONDE

↓ (MATRICE HESSIANA)

matrice 2×2, SIMMETRICA (se f è regolare)

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)} & \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) & \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)}$$

matrice Hessiana in $(x_0, y_0) \in D$

$$Hf(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) & \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) & \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

se fisso $(x_0,y_0) \in D$ $\quad Hf(x_0,y_0)$ è una matrice 2×2, simmetrica, a coefficienti reali

dato che è simmetrica ha 2 AUTOVALORI REALI (possono anche coincidere)

Def. Diremo che

1. $Hf(x_0,y_0)$ la matrice hessiana in $(x_0,y_0) \in D$
 è <u>POSITIVA</u> se ha 2 autovalori positivi

2. $Hf(x_0,y_0)$ è <u>NEGATIVA</u> se ha 2 autovalori negativi

3. $Hf(x_0,y_0)$ è INDEFINITA se ha 1 autovalore positivo e uno negativo

4. $Hf(x_0,y_0)$ è DEGENERE se un autovalore o entrambi sono 0.

Come determino il segno degli autovalori per una matrice 2×2, simmetrica?

$$H = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

λ_1, λ_2 AUTOVALORI

determinante $H = ab - c^2$ = PRODOTTO DEGLI AUTOVALORI

$$ab - c^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

1) se $\det H = ab - c^2 = 0 \rightarrow$ almeno uno degli autovalori è 0 e H è

DEGENERE

2) se $\det H = ab - c^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \rightarrow$

allora $\left.\begin{matrix} \lambda_1 < 0 & \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 > 0 & \lambda_2 < 0 \end{matrix}\right]$ H è INDEFINITA

(un autovalore positivo e altro è negativo)

3) se $\det H = ab - c^2 = \lambda_1 \lambda_2 > 0$

$\left.\begin{matrix} \lambda_1, \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 < 0 \end{matrix}\right]$ H è positiva oppure negativa

$$H = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

traccia matrice = somma della diagonale principale $= a+b$

$=$ somma degli autovalori $= \boxed{\lambda_1 + \lambda_2}$

se $\det H = ab - c^2 > 0$
$\operatorname{tr} H = a+b > 0$ $\Big]$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ H è POSITIVA

se $\det H = ab - c^2 > 0$
$\operatorname{tr} H = a+b < 0$ $\Big]$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ H è NEGATIVA

Es $f(x,y) = \underbrace{2x^2} + 3xy - y^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \underline{4x + 3y}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x - 3y^2$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \underset{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)}{4} & \underset{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)}{3} \\ \underset{\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)}{3} & \underset{\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)}{-6y} \end{pmatrix}$$

calcolo matrice hessiana nei pti critici

$(0,0)$ $\left(\frac{9}{16}, -\frac{3}{4}\right)$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(un autovalore $+$
un autov $-$)

$\det Hf(0,0) =$
$= 4 \cdot 0 - 3 \cdot 3 = -9$
$\downarrow$
INDEFINITA
$\lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 > 0$

$$Hf\left(\frac{9}{16}, -\frac{3}{4}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -6\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & +\frac{18}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det Hf\left(\frac{9}{16}, -\frac{3}{4}\right) = \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{9}{\cancel{2}} - 3\cdot 3 = 18 - 9 = 9 > 0$$

$$\operatorname{tr} Hf\left(\frac{9}{16}, -\frac{3}{4}\right) = 4 + \frac{9}{2} > 0$$

$Hf\left(\frac{9}{16}, -\frac{3}{4}\right)$ È POSITIVA (2 autovalori positivi)

CRITERIO dell'HESSIANA

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ regolare (continua, con derivate parziali prime e seconde continue).

Sia $(x_0, y_0) \in D$ un pto CRITICO di f

(cioè
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$)

1) se $Hf(x_0, y_0)$ è POSITIVA (cioè ha 2 autovalori positivi – cioè $\det H > 0$, $\operatorname{tr} H > 0$) allora

(x_0, y_0) è PUNTO DI MINIMO LOCALE

2) se $Hf(x_0,y_0)$ è negativa (due autovalori negativi – cioè $\det H > 0$ e $\mathrm{tr}\, H < 0$)

allora (x_0,y_0) è un pto di MASSIMO LOCALE

3) se $Hf(x_0,y_0)$ è indefinita (un autovalore positivo e uno negativo – $\det H < 0$)

allora (x_0,y_0) è un pto di SELLA (né di max né di minimo)

4) se $Hf(x_0,y_0)$ è degenere ($\det H = 0$), il criterio non dà informazioni

Es di pto di SELLA

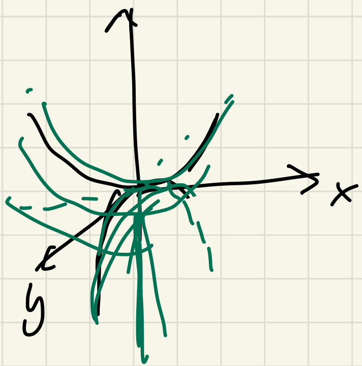
$$f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad \begin{cases} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)} = 2x = 0 \\ \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = -2y = 0 \end{cases}$$

unico pto critico è $(0,0)$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

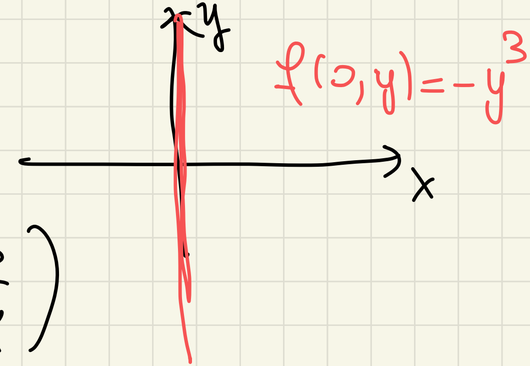
autovalori sono $2, -2$

INDEFINITA



es

$$f(x,y) = 2x^2+3xy-y^3$$



pti critici $\quad (0,0) \quad \left(\frac{9}{16}, -\frac{3}{4}\right)$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$ indefinita

$(0,0)$ pto di SELLA

$$Hf\left(\frac{9}{16}, -\frac{3}{4}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$ positiva

$\left(\frac{9}{16}, -\frac{3}{4}\right)$ è pto di MINIMO LOCALE

$\underline{ES}$ $\quad f(x,y) = \left(x^2+2y^2-1\right)^2$

$\underline{D=\mathbb{R}^2}$ $\qquad f(x,y) \geq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\cdot\left(x^2+2y^2-1\right)\cdot\left(2x+0+0\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\left(x^2+2y^2-1\right)\cdot\left(0+4y+0\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x\left(x^2+2y^2-1\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8y\left(x^2+2y^2-1\right) \end{cases}$$

Cerco i punti critici

$$\begin{cases} 4\underline{\underline{x}}\,(\underline{x^2+2y^2-1})=0 \\ 8y\,(x^2+2y^2-1)=0 \end{cases} \quad \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2y^2-1=0 \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 8\underline{\underline{y}}\cdot(0+2y^2-1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

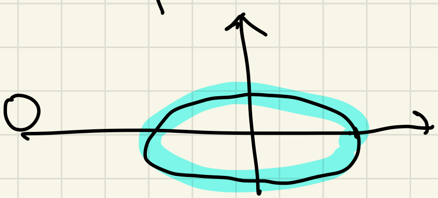
se $x^2+y^2-1=0$

Punti critici sono $(0,0)$ e tutti i pti (x,y) che risolvono $x^2+2y^2-1=0$

$$f(x,y) = (x^2+2y^2-1)^2$$

$\boxed{f(x,y) \geq 0}$ e $f(x,y)=0 \iff \underbrace{x^2+2y^2-1=0}_{\text{pti ellisse}}$

tutti i punti critici che soddisfano $x^2+2y^2-1=0$



sono tutti PUNTI DI MINIMO ASSOLUTO

(perché la funzione è positiva dappertutto e zero solo su quei punti)

Studio la natura di $(0,0)$.
mi calcolo l'hessiana

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x\cdot(x^2+2y^2-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 8y\,(x^2+2y^2-1)$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$$

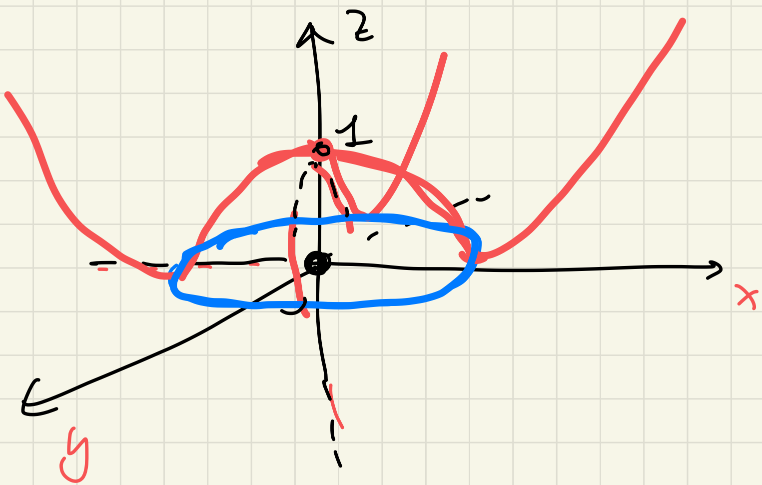
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4\,(\cancel{x^2}+\cancel{2y^2}-1)+\cancel{4x\cdot(2x+0+0)} & \cancel{4x}(0+\cancel{4y}+0) \\ 4\cdot(0+0-1)+4\cdot 0\cdot(2\cdot 0) & 4\cdot 0\,(2\cdot 0) \\ 4x\cdot(0+4y+0) & 8\cdot(\cancel{x^2}+\cancel{2y^2}-1)+\cancel{8y}\cdot\cancel{(0+4y+0)} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

autovalori sono
-4 e -8
$\downarrow$
negativi
$\downarrow$

$Hf(0,0)$ è negativa e per il criterio Hessiano $(0,0)$ è PUNTO DI MASSIMO LOCALE.

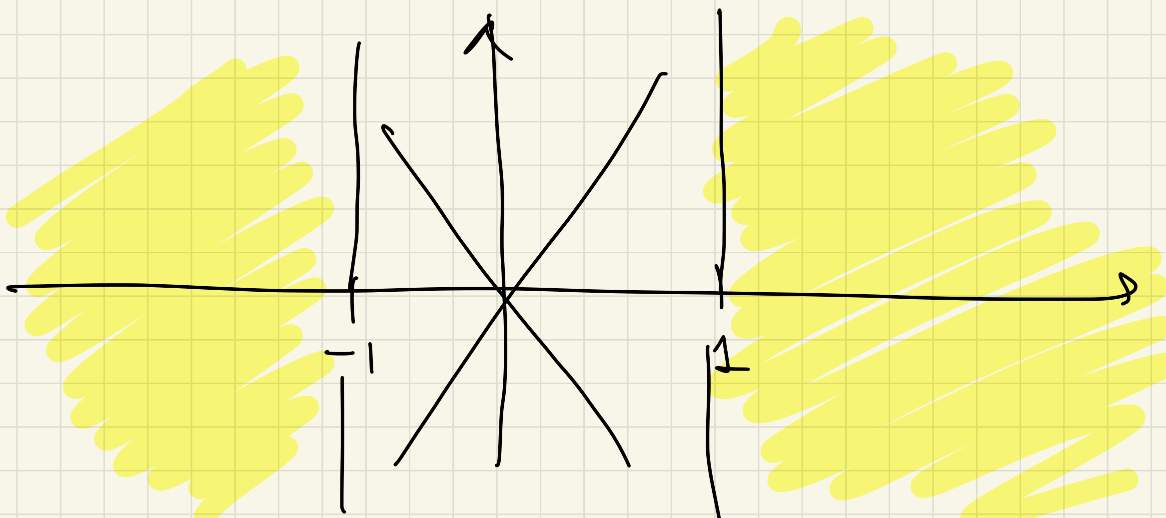


$$f(0,0) = (0+0-1)^2 = 1$$

Es $\quad f(x,y) = \log(\underbrace{x^2-1}) + y^2 - 2yx$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 - 1 > 0 \} =$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x > 1$ oppure $x < -1 \}$



$$f(x,y) = \underbrace{\lg(x^2-1)} + y^2 - 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2-1}\cdot 2x + 0 - 2y = \frac{2x}{x^2-1} - 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2x$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{x^2-1} - 2y = 0 \\ 2y - 2x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\cancel{2}x}{x^2-1} - \cancel{2}x = 0 \\ y = x \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x - x(x^2-1)}{x^2-1} = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x\,(1-x^2+1)}{x^2-1}=0 \\ y=x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x\cdot(2-x^2)}{\cancel{x^2-1}}=0 \\ y=x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2=2 \;\; \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{cases} \\ y \;\; \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

le soluzioni sono $\cancel{(0,0)\notin D}$

$D=\{(x,y) \quad x^2-1>0\}$

$$\left.\begin{array}{l} (\sqrt{2},\sqrt{2}) \in D \\ (-\sqrt{2},-\sqrt{2}) \in D \end{array}\right] \text{PUNTI CRITICI}$$

$$f(x,y) = \lg(x^2-1) + y^2 - 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2-1} \underbrace{- 2y}$$

$$\frac{2\cdot(x^2-1) - 4x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \underbrace{2y - 2x}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2\cdot 1(x^2-1) - 2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2} & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{Hf(\sqrt{2},\sqrt{2})}_{\cancel{\forall}} = \begin{pmatrix} \overset{4-2-8}{2\cdot 2-2-4\cdot 2} & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det H = -6\cdot 2 - (-2)(-2) = -12-4 = -16$$

$Hf(\sqrt{2},\sqrt{2})$ è indefinita $(\det H < 0)$

$(\sqrt{2},\sqrt{2})$ è pto di SELLA

$$Hf(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ è pto di SELLA.

Es $f(x) = e^{2x} \cdot (3x - y^2)$

$D = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{2x} \cdot 2 \cdot (3x - y^2) + e^{2x} \cdot 3 =$$

$$= e^{2x} \cdot [6x - 2y^2 + 3]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{2x}(0 - 2y) = -2ye^{2x}$$

cerco pti critici

$$\begin{cases} e^{2x} \cdot (6x - 2y^2 + 3) = 0 \\ \boxed{-2y \cdot e^{2x} = 0} \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

$e^{2x} > 0 \quad \forall x$

$$\begin{cases} e^{2x}(6x-2y^2+3)=0 \\ e^{2x}\cdot(-2y)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cancel{e^{2x}}\cdot(6x+0+3)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$e^{2x}>0 \ \forall x$

$$\begin{cases} 6x+3=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$$

L'unico p.to critico è $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 2e^{2x}(6x-2y^2+3)+e^{2x}\cdot 6 & 2e^{2x}\cdot(-2y) \\ 2e^{2x}\cdot(-2y) & e^{2x}\cdot(-2) \end{pmatrix}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{2x}(6x-2y^2+3)+e^{2x}\cdot 6 & 2e^{2x}\cdot(-2y) \\ 2e^{2x}(-2y) & e^{2x}(-2) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{Hf\left(-\frac{1}{2},0\right)}} = \begin{pmatrix} \underbrace{2e^{-1}\left(\overbrace{6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2\cancel{0}+3}^{=0}\right)}+e^{-1}\cdot 6 & \underbrace{2e^{-1}\cdot 0} \\ 2\cdot e^{-1}\cdot 0 & e^{-1}\cdot(-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{6\cdot e^{-1}} & 0 \\ 0 & \underbrace{-2e^{-1}} \end{pmatrix}$$

matrice indefinita

$\left(-\frac{1}{2},0\right)$ è pto di SELLA