domani 9–12
venerdì 10.30–12

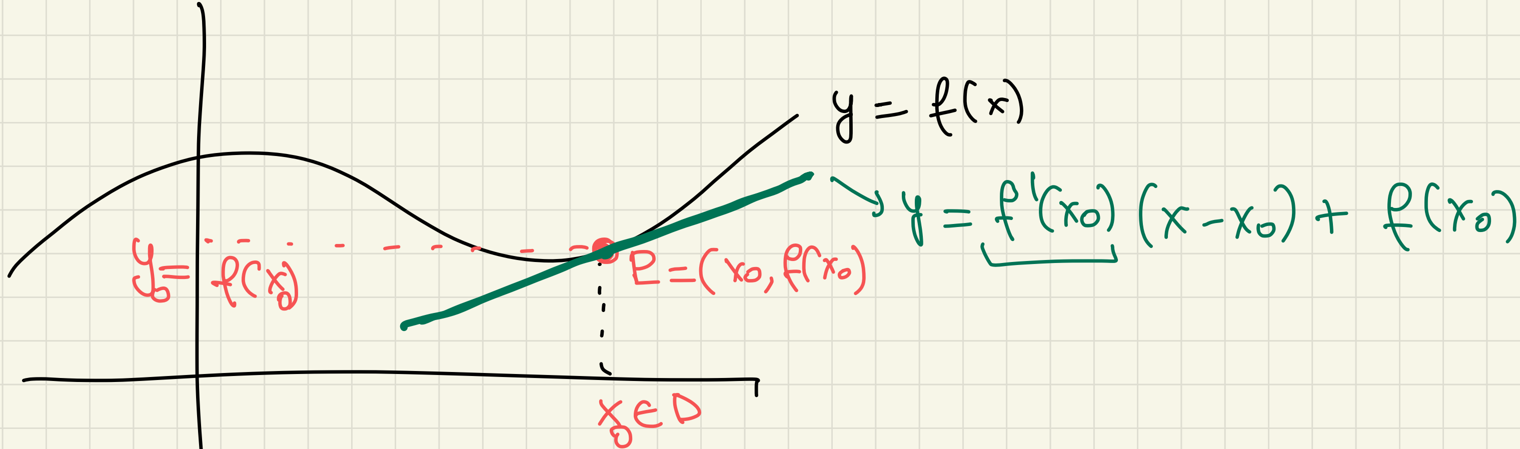
Finora $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ D dominio naturale

$D \subseteq \mathbb{R}$

funzione reale di variabile reale

tra le funzioni $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ c'è una sottoclasse speciale che è quella delle successioni
(funzioni che hanno come dominio un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$)

grafico è una curva nel piano cartesiano
$= \{ (x,y) \quad x \in D \quad y = f(x) \} \to$ curva di eq $\underline{y = f(x)}$



f è derivabile in x_0 ($\exists$ finito $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

$\downarrow$

allora il grafico di f ammette retta tangente in $(x_0, f(x_0))$ che ha eq.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

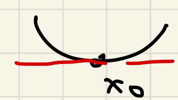
OSSERVAZIONE

- se f è regolare (derivabile in tutti i pti del dominio)

i punti di max e min di f si trovano tra i punti per cui $f'(x)=0$

(se la funzione è derivabile allora per trovare i candidati pti di max e minimo, cerco i pti in cui si annulla la derivata prima)

- se f è derivabile 2 volte in tutti i pti del dominio

se $\underbrace{f'(x_0)=0 \quad f''(x_0)>0}$ $\Longrightarrow$ 

x_0 pto di MINIMO

$f'(x_0)=0 \quad f''(x_0)<0$ 

x_0 pto di MASSIMO

se $f'(x_0)=0$ $f''(x_0)=0$ non posso concludere niente

$f(x)=x^3$ $x_0=0$ non è di max né di min

$f(x)=x^4$ $x_0=0$ pto di minimo

$f(x)=-x^4$ $x_0=0$ pto di massimo

Funzioni di 2 variabili reali

$$\boxed{\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = z \end{aligned}}$$

Es: $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

$f(0,0) = 0$ $\quad$ $f(1,0) = 1^2 + 0 = 1$

$f(0,1) = 0^2 + 2 \cdot 1 = 2$

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (1 variabile) x_0 pto di acc. per D

$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$ $\to$ $\forall \varepsilon > 0$ $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

esiste un intervallo centrato in x_0 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

tale che $\forall x \in D \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$

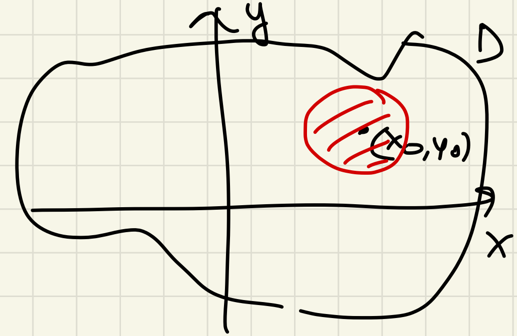
$\to f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

$\forall x \in D$ tale che distanza $(x, x_0) < \delta$

ho che $f(x)$ sta in $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

cioè $\boxed{-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$



$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ tale che

se $(x,y) \in D$ e $\operatorname{dist}((x,y),(x_0,y_0)) < \delta$

allora $\quad -\varepsilon < f(x,y) - L < \varepsilon$

f è continua in (x_0,y_0) se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Noi consideriamo funzioni di 2 variabili che siano composizioni tra funzioni elementari (polinomi, logaritmi, esponenziali, trigonometriche) con i con polinomi nelle 2 variabili (x, y)

es:

$$f(x,y) = \log(x^2+y^2-1)$$

$$\underbrace{(x,y)} \longmapsto \underbrace{x^2+y^2-1} \longrightarrow \log(x^2+y^2-1)$$

$\boxed{\text{DOMINIO}}$: pti (x,y) dove ha senso calcolare f

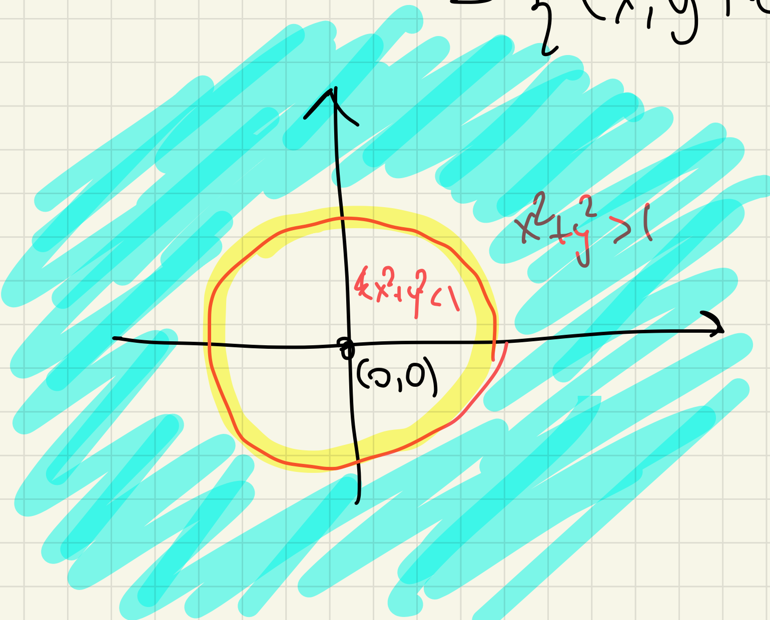
$$\boxed{x^2+y^2-1>0}$$

$$f(x,y) = \lg(x^2+y^2-1)$$

logaritmo è definito solo se argomento > 0

$$\text{DOMINIO} = \{(x,y) \quad x^2+y^2-1 > 0\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2+y^2 > 1\}$$



$x^2+y^2=1$

↓

circonferenza centrata in $(0,0)$ di raggio 1

$$f(x,y) = \arcsin\left(2-x^2-y^2\right)$$

$$\underbrace{(x,y) \longrightarrow 2-x^2-y^2}\longrightarrow \arcsin\left(2-x^2-y^2\right)$$

arcoseno è definito solo per argomenti compresi tra -1 e 1

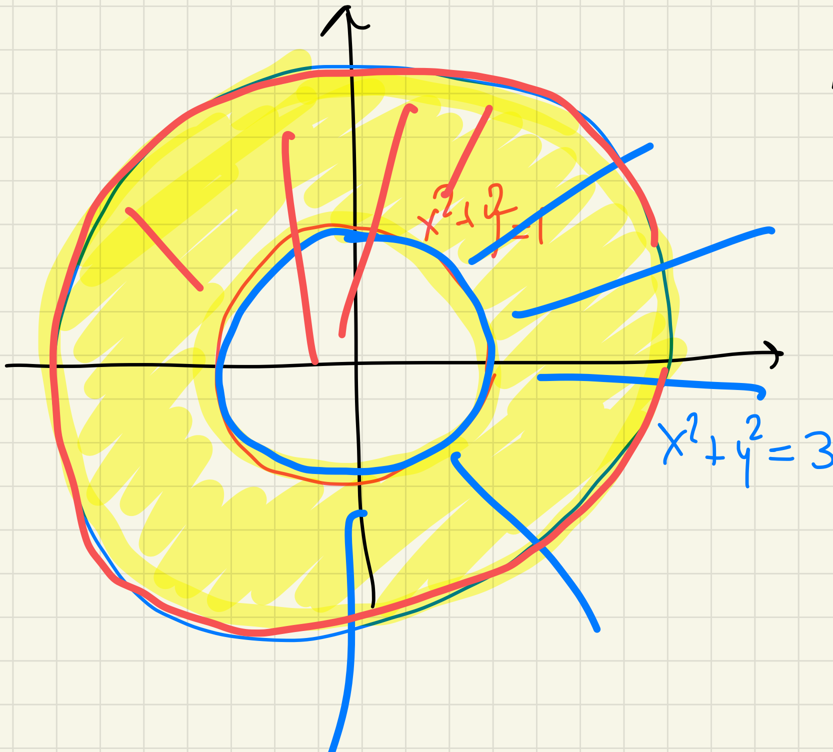
$$-1 \leq 2-x^2-y^2 \leq 1$$

$$x^2+y^2 \geq 1$$

$$\begin{cases} 2-x^2-y^2 \leq 1 \\ -1 \leq 2-x^2-y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x^2-y^2 \leq +1-2 \\ x^2+y^2 \leq 2+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x^2-y^2 \leq -1 \\ x^2+y^2 \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geq 1 \\ x^2+y^2 \leq 3 \end{cases}$$

$$\underbrace{D = \{ (x,y) \quad 1 \leq x^2+y^2 \leq 3 \}}$$



$x^2+y^2=1$ circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1

$x^2+y^2=3$ circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{3}$

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2}$$

$\downarrow$

circonf. di centro (x_0,y_0) e raggio r.

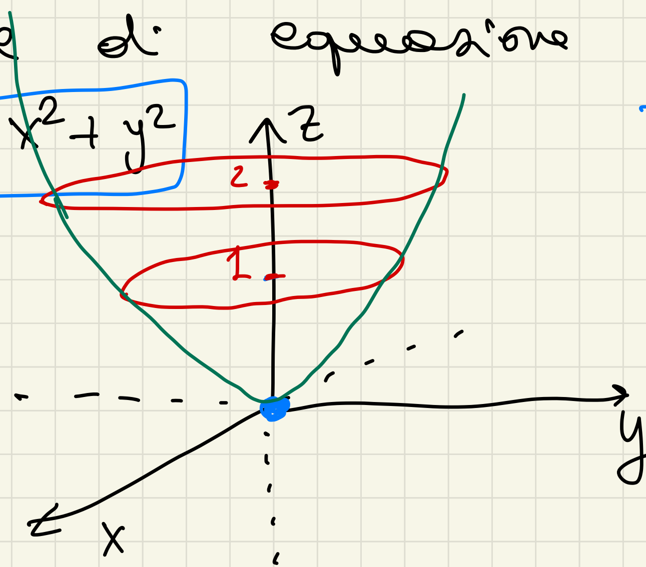
grafico di una funzione di 2 variabili è una superficie nello spazio $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$

$$\{(x,y,z) \quad (x,y)\in D \quad z=f(x,y)\}$$

→ superficie di equazione $z=f(x,y)$

Es $\boxed{f(x,y) = x^2+y^2}$

$D=\mathbb{R}^2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$



$f(0,0)=0$

$$\begin{cases} z=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Derivate ?}}$

$f(x,y)$

$f(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ho 2 derivate (DERIVATE PARZIALI — una rispetto alla variabile x e una rispetto alla variabile y)

① derivata PARZIALE rispetto alla variabile x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,\, y) - f(x,y)}{h}$$

derivata parziale rispetto alla variabile y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,\, y+h) - f(x,y)}{h}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ fisso y (lo considero un numero fissato) e derivo rispetto a x

$$\boxed{f(x,y) = 2x^2 + 3xy - y^2 + x^3 y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \underbrace{2 \cdot 2x + 3y \cdot 1 - 0 + 3x^2 \cdot y}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ fisso x (lo considero un numero) e derivo rispetto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \underbrace{0 + 3x \cdot 1 - 2y + x^3 \cdot 1}$$

Teorema Sia $f(x,y) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

regolare (continua e con derivate parziali che sono anch'esse funzioni regolari)

I pti di massimo e minimo di f si trovano nell'insieme dei pti critici (che sono i pti in cui si <u>ANNULLANO</u> <u>CONTEMPORANEAMENTE</u> le 2 derivate parziali

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

PUNTI CRITICI sono i pti che risolvono questo sistema

Es $f(x,y) = \underbrace{2x^2} + 3x\underbrace{y} - \underbrace{y^3}$ $\quad D = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + 3y - 0 = 4x + 3y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 + 3x \cdot 1 - 3y^2 = 3x - 3y^2 \end{cases}$$

Cerco i pti critici ("candidati" pti di massimo e minimo)

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x - 3y^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4 \cdot y^2 + 3y = 0 \\ x = y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y(4y+3) = 0 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -3/4 \\ x = (-3/4)^2 = 9/16 \end{cases}$$

I pti critici di f sono

$$(0,0) \quad e \quad \left(\frac{9}{16}, -\frac{3}{4}\right)$$

Candidati pti di massimo e minimo.

~ . ~

se f è regolare $(x_0, y_0) \in D$
il piano di equazione

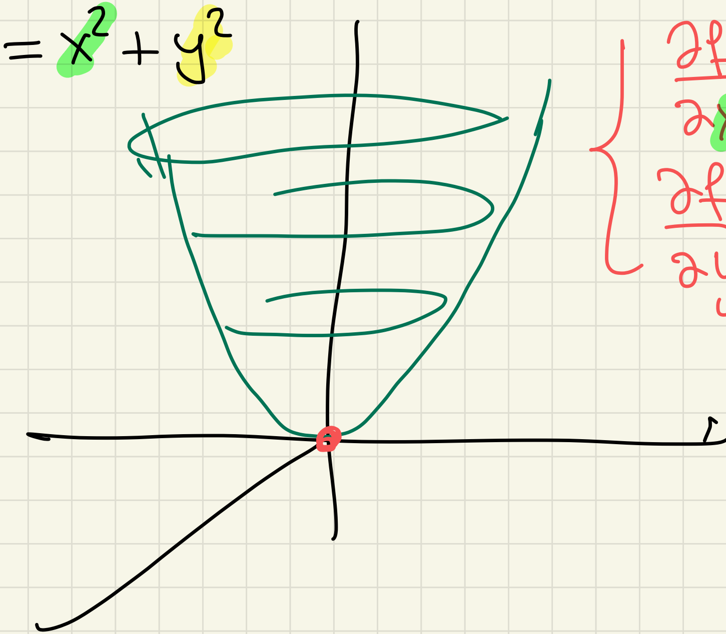
$$z = \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}(x-x_0) + \cancel{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}(y-y_0) + f(x_0,y_0)$$

è piano tangente al grafico di f
nel pto.

se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

→ $\boxed{\text{piano tangente è ORIZZONTALE}}$

$f(x,y) = x^2 + y^2$



$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y = 0 \end{cases}$$

↓

UNICO PUNTO CRITICO è

$(0,0)$