UNIVERSITA' DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Tutorato di Analisi Matematica I
Docente del corso: prof. B.Bianchini

Argomento:

Serie numeriche. Equazioni differenziali ordinarie.

Tutor: Guido Costagliola
Email: guido.costagliola@studenti.unipd.it

Anno Accademico: 2024/2025

"Before I came here I was confused about this subject.
Having listened to your lecture I am still confused.
But on a higher level."

-Enrico Fermi

1 Serie numeriche

Fondamentale da ricordare:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge se e solo se $\alpha > 1$.

1.1 Esercizio 1

Sia data la seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt[3]{n} + n^\alpha + 1}$$

i. Si studi la convergenza della serie quando $\alpha = 1$;

ii. Si studi la convergenza della serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hint: si ricordi lo sviluppo di Taylor della funzione seno attorno a $x = 0$: $\sin x = x + o(x^2)$.

1.2 Esercizio 2

Sia data la seguente serie numerica :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{1 + n\alpha^2}$$

i. Si studi la convergenza semplice ed assoluta della serie per $\alpha = 1$ e $\alpha = -1$;

ii. Si studi la convergenza semplice ed assoluta della serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ricorda: convergenza assoluta impilica convergenza semplice, ma non vale il viceversa.

1.3 Esercizio 3

Sia data la seguente serie numerica definita per $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}\right)$$

i. Studiare la convergenza della serie quando $a = b = 0$;

ii. Studiare la convergenza della serie quando $a = 1$ al variare di $b \in \mathbb{R}$;

iii. Studiare la convergenza della serie al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

2 Equazioni differenziali

2.1 A variabili separabili

Si consideri l'equazione differenziale a variabili separabili del primo ordine:

$$y' = e^{-x+y}$$

i. Trovare la soluzione che soddisfa la condizione $y(0) = 0$;

ii. Trovare la soluzione che soddisfa la condizione $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

2.2 Lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y'' + 4y = 8$$

i. Trovare la soluzione che soddisfa le condizioni $y'(0) = 0$ e $y(0) = 1$;

ii. Trovare la soluzione che soddisfa la condizione $y'(0) = 0$ e tale che il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x^2}$$

esista. Dire il valore di tale limite.

Soluzioni

Serie numeriche

Esercizio 1

Cominciamo innanzitutto col notare che per $n \to +\infty$ si può effettuare la seguente approssimazione asintotica:

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

i. Per $\alpha = 1$ la serie si presenta così:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt[3]{n} + n^{\alpha} + 1} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt[3]{n} + n^{\alpha} + 1} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}{n^{\frac{1}{3}} + n} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Dove si è utilizzato che per $n \to +\infty$ l'1 è trascurabile e $n >> n^{\frac{1}{3}}$.
Per cui la serie converge.

ii. Svolgendo le stesse approssimazioni asintotiche precedenti si arriva a:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}{n^{\frac{1}{3}} + n^{\alpha}}$$

Bisogna adesso capire quale termine è dominante al denominatore per $n \to +\infty$. Distinguamo i seguenti casi:

- Caso $\alpha > \frac{1}{3}$: in questo caso $n^{\alpha} >> n^{\frac{1}{3}}$, allora la serie è asintotica a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

  che converge se e solo se $\alpha + \frac{1}{2} > 1 \iff \alpha > \frac{1}{2}$.

- Caso $\alpha \leq \frac{1}{3}$: in questo caso opposto la serie è asintotica a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{6}}}$$

  che diverge.

In conclusione la serie converge solo per $\alpha > \frac{1}{2}$.

Esercizio 2

i. Per $\alpha = 1$ convergenza semplice ed assoluta coincidono in quanto il termine generale è sempre positivo. La serie si presenta così:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge.
Per $\alpha = -1$, partiamo dalla convergenza assoluta:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|(-1)^n|}{1+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n}$$

Ma questa serie diverge, come visto prima.
Potrebbe però esserci convergenza semplice. Controlliamo.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n}$$

La serie è a segno alterno, perciò applichiamo la regola di Leibniz. Il termine generale della serie è $a_n = \frac{1}{1+n}$.

1. Si ha che $a_n = \frac{1}{1+n} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$;
2. Il termine è infinitesimo, difatti per $n \to +\infty$, $\frac{1}{1+n} \to 0$;
3. Bisogna verificare che $a_{n+1} \leq a_n$:

   $$\frac{1}{2+n} \leq \frac{1}{1+n} \iff n+1 \leq n+2 \iff 1 \leq 2.$$

   Il che è sempre vero.

Allora la serie converge semplicemente.

ii. Partiamo dalla convergenza assoluta:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\alpha|^n}{1+n\alpha^2} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\alpha|^n}{n\alpha^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\alpha|^{n-2}}{n} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\alpha|^n}{n}$$

che converge se e solo se $|\alpha| < 1 \iff -1 < \alpha < 1$. Si noti che nell'approssimazione asintotica di sopra si è considerato $\alpha \neq 0$, ma il caso $\alpha = 0$ è banale in quanto il termine generale si annulla identicamente e c'è convergenza.
Per $\alpha = \pm 1$ la serie è asintotica a:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge.
Per cui la serie converge assolutamente (e quindi anche semplicemente) per $|\alpha| < 1$.
Passiamo ora a studiare la convergenza semplice per gli altri valori di α.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{1+n\alpha^2} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{n-2}}{n} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n}$$

La serie diverge per $\alpha > 1$ (al numeratore ci sarebbe un esponenziale crescente). Per $\alpha = 1$ la serie diverge e per $\alpha = -1$ converge come visto prima.
Studiamo allora il caso $\alpha < -1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{1+n\alpha^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n|\alpha|^n}{1+n\alpha^2} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{|\alpha|^n}{n}$$

Dove si è usato che per $\alpha < 0$, si può riscrivere $\alpha = -|\alpha|$.
La serie è allora stata riscritta come serie e segno alterno, per cui si può applicare il criterio di Leibniz. Tuttavia si nota subito che per $n \to \infty$:

$$\frac{|\alpha|^n}{n} \to +\infty$$

Pertanto la serie diverge.
In conclusione si ha:

- Convergenza assoluta: $-1 < \alpha < 1$;
- Convergenza semplice: $-1 \leq \alpha < 1$.

Esercizio 3

Anche qui, come nel primo esercizio, si può sfruttare l'espansione di Taylor per effettuare la seguente approssimazione asintotica:

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Per cui la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - a + \frac{1-b}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

i. Per $a = b = 0$, si ha:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} (1 + o(1))$$

che diverge.

ii. Per $a = 1$, si ha:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-b}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

che converge se e solo se il termine proporzionale a $\frac{1}{n}$ si annulla identicamente, ovvero se $b = 1$. Infatti dal termine successivo $\frac{1}{n^2}$ in poi, vi è convergenza assicurata.

iii. Secondo lo stesso principio di prima, vi è convergenza solo se il termine di grado 0 e il termine proporzionale a $\frac{1}{n}$ si annullano, ovvero se e solo se $a = 1$ e $b = 1$.

Equazioni differenziali

A variabili separabili

Il procedimento da seguire per risolvere questa tipologia di esercizi è il seguente:

- Scrivere $y' = \frac{dy}{dx}$;
- Separare le variabili, ovvero portare da un lato tutti i termini contenenti la variabile x e dall'altro tutti i termini con y;
- Integrare membro a membro, ricordandosi della costante di integrazione;
- Esplicitare y in funzione di x: $y(x)$.

Per trovare il valore della costante di integrazione $c \in \mathbb{R}$, è necessario applicare le condizioni iniziali specificate nell'esercizio.

i. Seguiamo i passaggi:

$$y' = e^{-x+y} \iff \frac{dy}{dx} = e^{-x+y} \iff e^{-y}dy = e^{-x}dx \iff \int e^{-y}dy = \int e^{-x}dx$$

$$\iff -e^{-y} = -e^{-x} + c' \iff e^{-y} = e^{-x} + c \iff -y = \log\left(e^{-x} + c\right)$$

Pertanto:

$$y(x) = -\log(e^{-x} + c) \quad c \in \mathbb{R}.$$

Per trovare il valore di c imponiamo $y(0) = 0$:

$$y(0) = -\log(1 + c) = 0 \iff c = 0.$$

Dunque la soluzione finale è:

$$y(x) = -\log(e^{-x}) = x$$

ii. In questo caso cambia solamente la condizione per trovare $c \in \mathbb{R}$. Imponiamola:

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} (-\log(e^{-x} + c)) = -\log c = 0 \iff c = 1.$$

Dunque la soluzione è:

$$y(x) = -\log(e^{-x} + 1)$$

Lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

La soluzione generale di questa tipologia di equazioni differenziali è data dalla somma della soluzione dell'equazione omogenea e una soluzione particolare:

$$y(x) = y_{omogenea}(x) + y_{particolare}(x)$$

Nota: *geometricamente* ciò significa che lo spazio delle soluzioni dell'equazione generale è uno *spazio affine*, mentre lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno *spazio vettoriale*. Vedrete meglio cosa significa tutto ciò nel corso di Algebra Lineare e Geometria.

i. Partiamo dal risolvere l'equazione omogenea associata:

$$y'' + 4y = 0$$

La cui equazione caratteristica è:

$$z^2 + 4 = 0 \iff z = \pm 2i$$

Dato che le soluzioni sono complesse coniugate, la soluzione dell'omogenea sarà una combinazione lineare della funzione seno e coseno:

$$y_{omogenea}(x) = c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x)$$

Oss: si noti che il numero delle costanti da determinare è uguale all'ordine dell'equazione.

Poi, si nota ad occhio che una soluzione particolare (ne basta una qualsiasi!) è: $y_{particolare} = 2$. Lo si provi per sostituzione diretta.
Allora la soluzione generale è:

$$y(x) = c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x) + 2$$

Poniamo ora le condizioni iniziali per determinare $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$$y(0) = c_2 + 2 = 1 \iff c_2 = -1$$
$$y'(x) = 2c_1 \cos(2x) - 2c_2 \sin(2x) \Rightarrow y'(0) = 2c_1 = 0 \iff c_1 = 0$$

Allora la soluzione generale è:

$$y(x) = 2 - \cos(2x)$$

ii. In questo caso cambiano solamente le condizioni da imporre per trovare $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Da $y'(0) = 0$ si trova, come prima, $c_1 = 0$. Imponiamo l'altra:

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + c_2\cos(2x)}{x^2} \overset{Taylor}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 + c_2 - 2c_2x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

Il limite esiste finito se e solo se $c_2 = -2$ e vale $l = 4$.
La soluzione ricercata è alla fine:

$$y(x) = 2 - 2\cos(2x)$$