ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 19.02.2014

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = (1 - |x|)e^{\frac{1}{2x+2}}.$$

1) Determinare il dominio e discutere il segno di f.

2) Calcolare i limiti significativi di f e determinarne gli asintoti.

3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.

4) Calcolare i limiti significativi di f' e studiare la derivabilità di f in $x = 0$.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento.

1) Il dominio é dato da $2x + 2 \neq 0$ i.e.

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq -1\}.$$

Inoltre $f > 0$ se $|x| < 1$.

2) Calcoliamo i limiti significativi

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$$

dove la prima forma indeterminata si risolve usando le proprietá dell'esponenziale. Dall'ultimo limite otteniamo la possibilitá di asintoti obliqui. Abbiamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \mp 1$$

e quindi rimane da calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + x = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - e^{\frac{1}{2x+2}}\right) + 1 = 1 + \lim_{x\to+\infty} x\left(-\frac{1}{2x+2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

Perció la retta $y = -x + 1/2$ é asintoto obliquo destro. Allo stesso modo abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} x\left(-1 + e^{\frac{1}{2x+2}}\right) + 1 = 1 + \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{2x+2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{3}{2}$$

e quindi la retta $y = x + 3/2$ é asintoto obliquo sinistro.

3) Per $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ abbiamo

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{\frac{1}{2x+2}} \left(\text{segno(x)} + \frac{1-|x|}{2(x+1)^2} \right)$$

Per $x > 0$ otteniamo che $f'(x) > 0$ se e solo se $1 + \frac{1-x}{2(x+1)^2} < 0$ cioé $2x^2 + 3x + 3 < 0$, evidentemente assurdo. Quindi in $\mathbb{R}^+$ la funzione é strettamente monotona decrescente. Per $x < 0$ abbiamo che $f'(x) > 0$ se e solo se $-1 + \frac{1+x}{2(x+1)^2} < 0$ cioé per $x < -1$ e $0 > x > -\frac{1}{2}$ Quindi la funzione é strettamente monotona crescente in $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, 0)$. Quindi il punto $x_1 = -\frac{1}{2}$ é un punto di minimo relativo proprio.

4) I limiti significativi di f' sono in 1^- e in 0. In 1^- abbiamo $\lim_{x \to -1^-} f'(x) = 0$ per la presenza dell'esponenziale. Mentre in 0 otteniamo:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$$

Quindi il punto $x_o = 0$ é un punto angoloso e di MAX RELATIVO.

5) Il grafico della funzione segue:

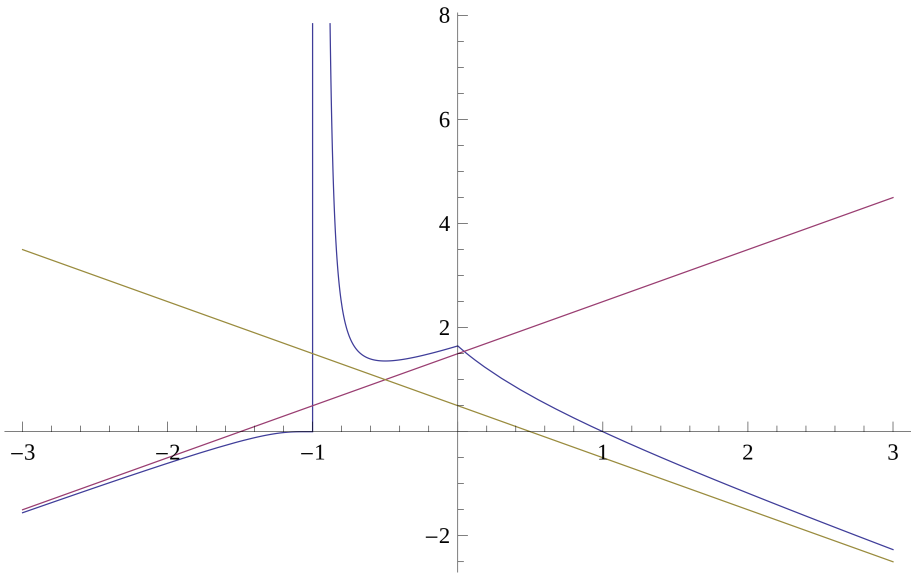

Figure 1: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2+1} \frac{x^n}{4^n (x+4)^n}.$$

1) Studiare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ c'è convergenza assoluta.

2) Studiare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ c'è convergenza semplice.

Svolgimento.

1),2) Applichiamo il criterio della radice per la convergenza assoluta e quindi semplice della serie. Siamo portati quindi a calcolare il seguente

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n-1}{n^2+1}} \frac{|x|}{4|x+4|} = \frac{|x|}{4|x+4|} = L$$

Quindi se $L > 1$ poiché il termine n-esimo della serie non tende a 0, non abbiamo nemmeno convergenza semplice, mentre se $L < 1$ abbiamo convergenza assoluta e quindi semplice. La disequazione $\frac{|x|}{4|x+4|} < 1$ é equivalente a $x^2 < 16(x^2 + 8x + 16)$. Quindi per $x \in \left(-\infty, -\frac{16}{3}\right) \cup \left(-\frac{16}{5}, +\infty\right)$ la serie converge assolutamente mentre per $x \in \left(-\frac{16}{3}, -\frac{16}{5}\right)$ la serie non converge nemmeno semplicemente. Vediamo il caso $x = -\frac{16}{5}$ in questo caso il termine n-esimo della serie diventa

$$(-1)^n \frac{n-1}{n^2+1}$$

come si vede facilmente tale termine é infinitesimo e decrescente. Quindi per il criterio di Leibnitz abbiamo convergenza semplice ma NON assoluta, poiché tale termine é asintotico a $\frac{1}{n}$. Per $x = -\frac{16}{3}$ il termine n-esimo diventa

$$\frac{n-1}{n^2+1}$$

e quindi in tale punto la serie diverge a $+\infty$.

Esercizio 3 Calcolare

$$\int_2^{10} \arctan\left(\sqrt[3]{x-2}\right)\, dx.$$

Svolgimento. Poniamo $x - 2 = t^3$ e quindi l'integrale diventa (usando integrazione per parti)

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_0^2 \arctan t.3t^2 dt = t^3 \arctan t|_0^2 - \int_0^2 \frac{t^3}{t^2+1} dt = 8\arctan 2 - \int_0^2 \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right) dt\\ &8\arctan 2 - 2 + \tfrac{1}{2}\log(x^2+1)|_0^2 = 8\arctan 2 - 2 + \tfrac{1}{2}\log 5\end{aligned}$$

Esercizio 4 Determinare e disegnare nel piano di Gauss l'insieme

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,:\, \left||z+i|^2 + (z+i)^2\right| \geq \left||z+i|^2 - \overline{(z+i)}^2\right|\right\}.$$

Svolgimento. Ponendo $z = x + iy$ abbiamo che

$$\left||z+i|^2 + (z+i)^2\right| = \left|x^2 + (y+1)^2 + x^2 - (y+1)^2 + 2ix(y+1)\right| = 2|x|\sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

mentre

$$\left||z+i|^2 - \overline{(z+i)}^2\right| = \left|x^2 + (y+1)^2 - (x - i(y+1))^2\right| = 2|y+1|\sqrt{(y+1)^2 + x^2}$$

Quindi le soluzioni della disequazione sono date dall'unione dei seguenti insiemi:

$$(0,-1) \cup \{(x,y) \;:\; |x| \geq |y+1|\}$$

Poiché $|x| \geq |y+1|$ é equivalente a $(x-y-1)(x+y+1) \geq 0$ e $(0,-1)$ appartiene a tale insieme, le soluzioni sono date dall'insieme in verde sotto riportato

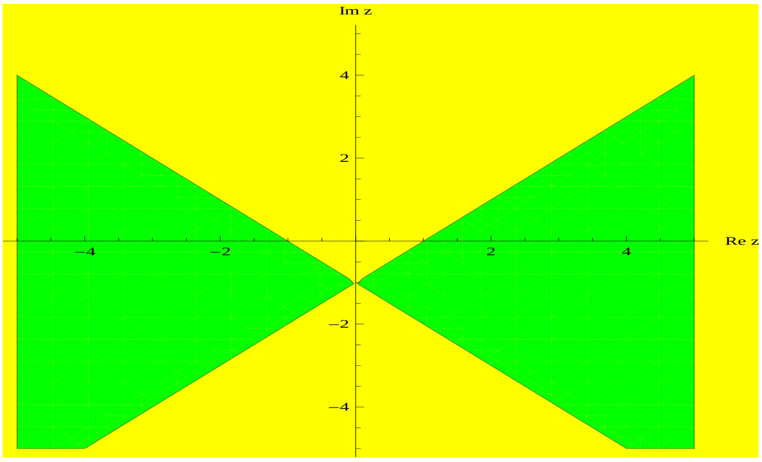

Figure 2: Soluzione dell'esercizio 4 del Tema 1 .

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione
$$f(x) = (2 - |x|)\mathrm{e}^{\frac{1}{2x+4}}.$$

1) Determinare il dominio e discutere il segno di f.

2) Calcolare i limiti significativi di f e determinarne gli asintoti.

3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.

4) Calcolare i limiti significativi di f' e studiare la derivabilità di f in $x = 0$.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. 1) Il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e f è positiva se e solo se $|x| < 2$.
2) Evidentemente $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$, mentre $\lim_{x\to-2^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$ ($x = -2$ asintoto verticale destro). Quest'ultimo limite è una conseguenza immediata dei confronti tra esponenziali e potenze. Per quanto riguarda gli asintoti orizzontali, si ha: $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = -1$ e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) + x &= \lim_{x\to+\infty} x\big(1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{2x+4}}\big) + 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2x+4}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\Big(\frac{-1}{2x+4} + o\big(\frac{-1}{2x+4}\big)\Big) + 2 = \frac{3}{2},\end{aligned}$$

mentre $\lim_{x\to-\infty} f(x)/x = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+x}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{2x+4}} = 1$ e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to-\infty} x\big(\mathrm{e}^{\frac{1}{2x+4}} - 1\big) + 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2x+4}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\Big(\frac{1}{2x+4} + o\big(\frac{-1}{2x+4}\big)\Big) + 2 = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Quindi $y = -x + 3/2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, mentre $y = x + 5/2$ lo è per $x \to -\infty$.
3) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{2x+4}} + (2-x)\frac{-2}{(2x+4)^2}e^{\frac{1}{2x+4}} \\ e^{\frac{1}{2x+4}} + (2+x)\frac{-2}{(2x+4)^2}e^{\frac{1}{2x+4}} \end{cases} = \begin{cases} -2e^{\frac{1}{2x+4}}\frac{2x^2+7x+10}{(2x+4)^2} & \text{per } x > 0 \\ 2e^{\frac{1}{2x+4}}\frac{2x^2+7x+6}{(2x+4)^2} & \text{per } x < 0,\ x \neq -2. \end{cases}$$

Il trinomio $2x^2 + 7x + 10$ è sempre positivo e quindi f è strettamente decrescente per $x > 0$. Il trinomio $2x^2+7x+6$ ha per zeri -2, da scartare, e $-3/2$, quindi $f'(x) < 0$ se e solo se $-2 < x < -3/2$. Quest'ultimo punto è perciò un punto di minimo relativo stretto, mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo stretto.
d) Si ha $\lim_{x\to-2^-} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to0^-} f'(x) = 3/4e^{1/4}$ e $\lim_{x\to0^+} f'(x) = -5/4e^{1/4}$, e quindi 0 è un punto angoloso.
e) Il grafico di f, con i rispettivi asintoti, è in figura.

Esercizio 2 Si consideri la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} \frac{x^n}{(9+x)^n}.$$

1) Studiare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ c'è convergenza assoluta.

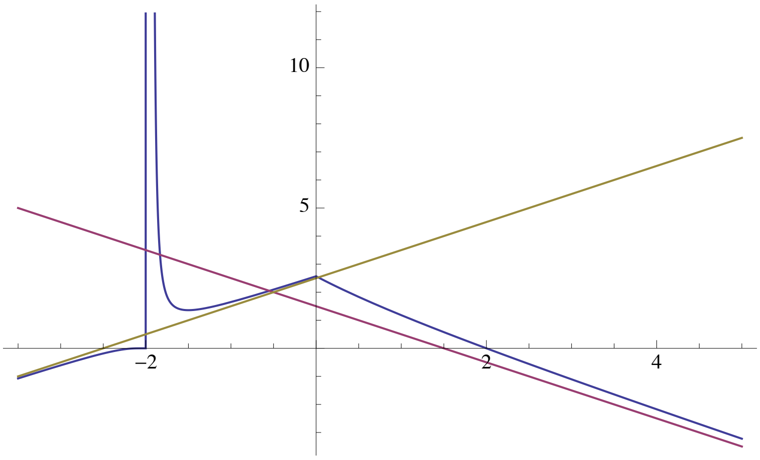

Figure 3: Grafico della funzione del Tema 2 .

2) Studiare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ c'è convergenza semplice.

Svolgimento. 1) Il criterio della radice dà che la serie converge assolutamente, e quindi semplicemente, se

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{n(n+1)}} \frac{|x|}{|x+9|} = \frac{|x|}{|x+9|} =: L < 1,$$

mentre se $L > 1$ il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie non converge neanche semplicemente. La disequazione $\frac{|x|}{|x+9|} < 1$ è equivalente alla disequazione $x^2 < (x+9)^2$, che ha per soluzioni la semiretta $x > -9/2$. Quindi la serie converge assolutamente, e semplicemente, per $x > -9/2$, mentre non converge né assolutamente né semplicemente per $x < -9/2$. Per $x = -9/2$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}. \tag{1}$$

Il termine generale, in valore assoluto, è asintotico a $\frac{1}{n}$ e quindi la serie (1) diverge assolutamente. Siccome la successione $a_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$ è decrescente, in quanto $\frac{d}{dx}\frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{-x^2-4x-2}{x^2(x+1)^2} < 0$ per $x > 0$ la serie (1) converge per il criterio di Leibniz.

Esercizio 3 Calcolare

$$\int_3^{30} \arctan\left(\sqrt[3]{x-3}\right)\, dx.$$

Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_3^{30} \arctan\left(\sqrt[3]{x-3}\right)\, dx &= (\text{ponendo } x-3=t^3, \text{ da cui } dx = 3t^2dt) = 3\int_0^3 t^2 \arctan t\, dt \\
&= (\text{per parti}) = t^3 \arctan t|_0^3 - \int_0^3 \frac{t^3}{t^2+1} dt \\
&= 27\arctan 3 - \int_0^3 \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right) dt \\
&= 27\arctan 3 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\log(t^2+1)|_0^3 \\
&= 27\arctan 3 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\log 10.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Determinare e disegnare nel piano di Gauss l'insieme

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \left||z-i|^2 + (z-i)^2\right| \geq \left||z-i|^2 - \overline{(z-i)}^2\right|\right\}.$$

Svolgimento. Ponendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, la disequazione

$$\left||z-i|^2 + (z-i)^2\right| \geq \left||z-i|^2 - \overline{(z-i)}^2\right|$$

diventa

$$\left||x+i(y-1)|^2 + (x+i(y-1))^2\right| \geq \left||x+i(y-1)|^2 - (x-i(y-1)^2\right|,$$

cioè

$$\left|x^2 + (y-1)^2 + x^2 - (y-1)^2 + 2ix(y-1)\right| \geq \left|x^2 + (y-1)^2 - x^2 + (y-1)^2 + 2ix(y-1)\right|,$$

che si semplifica in

$$\left|x^2 - ix(y-1)\right| \geq \left|(y-1)^2 + ix(y-1)\right|.$$

Passando al quadrato dei moduli, la disequazione precedente equivale a

$$x^4 + x^2(y-1)^2 \geq (y-1)^4 + x^2(y-1)^2,$$

che a sua volta equivale a

$$\big(x^2 + (y-1)^2\big)\big(x^2 - (y-1)^2\big) \geq 0,$$

cioè

$$\big(x + (y-1)\big)\big(x - (y-1)\big) \geq 0. \tag{2}$$

La regione descritta dalla disuguaglianza (2) è quella colorata in figura.

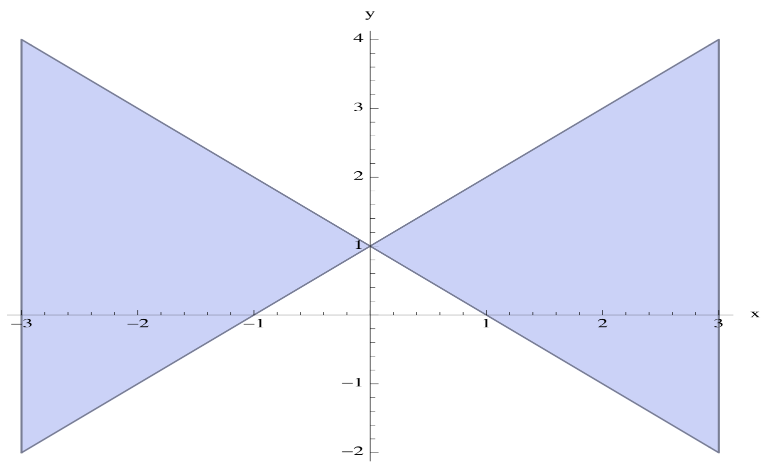

Figure 4: Soluzione dell'esercizio 4 del Tema 2 .

TEMA 3

Esercizio 1 Si consideri la funzione
$$f(x) = (|x| - 2)\mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}}.$$

1) Determinare il dominio e discutere il segno di f.
2) Calcolare i limiti significativi di f e determinarne gli asintoti.
3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.
4) Calcolare i limiti significativi di f' e studiare la derivabilità di f in $x = 0$.
5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. $\mathrm{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq 2\}$.
Si ha $f(x) \geq 0 \iff |x| - 2 \geq 0 \iff x \leq -2$ o $x \geq 2$.
Limiti:
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (|x| - 2) \lim \lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} = +\infty.$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = (\text{ pongo } t = \frac{1}{x-2}\ ) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t/2}}{t} = 0.$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = (\text{ pongo } t = \frac{1}{x-2}\ ) = \lim_{t\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t/2}}{t} = -\infty.$$
Asintoti. La retta $x = 2$ è asintoto verticale sinistro. Per l'asintoto obliquo destro calcolo
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x} \cdot \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} = 1$$
e poi
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} (x-2)\mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} - x = \lim_{x\to+\infty} \big(\mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} - 1\big)x - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} = \lim_{x\to+\infty} \big(\frac{1}{4-2x} + o\big(\frac{1}{4-2x}\big)\big)x - 2 =$$
$= \lim_{x\to+\infty} \big(\frac{x}{4-2x}\big) - 2 = -\frac{1}{2} - 2$. Quindi la retta $y = x - \frac{5}{2}$ è asintoto obliquo destro.
Per l'asintoto obliquo sinistro calcolo
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)/x = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-2}{x} \cdot \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} = -1$$
e poi
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} (-x-2)\mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} + x = \lim_{x\to-\infty} \big(-\mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} + 1\big)x - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \big(-\frac{1}{4-2x} + o\big(\frac{1}{4-2x}\big)\big)x - 2 =$$
$= \lim_{x\to-\infty} \big(-\frac{x}{4-2x}\big) - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$. Quindi la retta $y = -x - \frac{3}{2}$ è asintoto obliquo sinistro.

Derivata prima. Si ha per $x > 0$
$$f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} + (x-2)\mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} \frac{1}{2} \frac{1}{(2-x)^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} \left(1 + \frac{1}{2(x-2)}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} \frac{2x-3}{2(x-2)}.$$

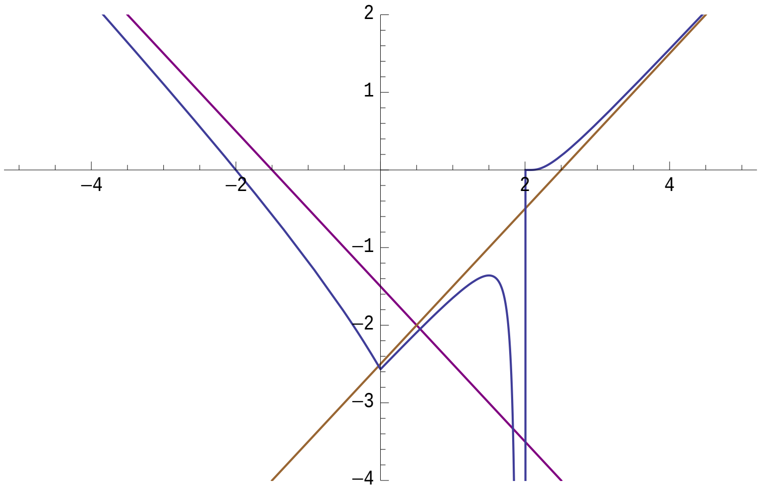

Figure 5: Il grafico di f e degli asintoti (Tema 3)

e $f'(x) \geq 0$ per $x \geq \frac{3}{2}$. La funzione è crescente per $x > 3/2$ e decrescente per $0 < x < 3/2$ quindi $x = 3/2$ è punto di minimo locale con $f(3/2) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}$.

Per $x < 0$ si ha

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} - (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} \frac{1}{2} \frac{1}{(2-x)^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} \left(-1 + \frac{x+2}{2(x-2)^2} \right) = -\mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} \frac{(10 - 7x + 2x^2)}{2(x-2)^2}.$$

Si vede subito che $-(10 - 7x + 2x^2) < 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi $f(x)$ risulta decrescente per $x < 0$.

Studio dei limiti di f' per $x \to 0$. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} \frac{2x-3}{2(x-2)} = \frac{3}{4}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -\mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} \frac{(10 - 7x + 2x^2)}{2(x-2)^2} = -\frac{10}{8}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}.$$

Quindi $x = 0$ è un punto angoloso. Infine

$$\lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{4-2x}} \frac{2x-3}{2(x-2)} = 0.$$

Il grafico di f e degli asintoti è in figura.

Esercizio 2 Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+n}{n(n+2)} \frac{x^n}{(x+2)^n}.$$

1) Studiare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ c'è convergenza assoluta.

2) Studiare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ c'è convergenza semplice.

Svolgimento. Usando il criterio della radice si trova

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1+n}{n(n+2)}\frac{x^n}{(x+2)^n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1+n}{n(n+2)}}\frac{|x|}{|(x+2)|} = \frac{|x|}{|(x+2)|}$$

Si ha convergenza assoluta se $\frac{|x|}{|(x+2)|} < 1 \iff x > -1$.
Se $\frac{|x|}{|(x+2)|} > 1$ cioè se $x \in (-\infty, -1)$ il termine ennesimo non tende a 0, e non può esserci convergenza assoluta (nè semplice).
Infine se $\frac{|x|}{|(x+2)|} = 1$ cioè se $x = -1$ la serie de moduli diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+n)}{n(n+2)}$ che è divergente avendo lo stesso comportamento della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e quindi in tale punto non c'è convergenza assoluta.

Per la convergenza semplice, essa sussiste per $x > -1$ dato che la convergenza assoluta implica la semplice. Per $x = -1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(1+n)}{n(n+2)}$. Tale serie converge per il criterio di Leibnitz dato che $\frac{(1+n)}{n(n+2)} \to 0$ per $n \to +\infty$ e la successione $\left(\frac{(1+n)}{n(n+2)}\right)_n$ è decrescente. Infatti

$$\frac{(1+n)}{n(n+2)} \geq \frac{(n+2)}{(n+1)(n+3)} \iff (n+1)^2(n+3) \geq n(n+2)^2$$

che si vede facilmente essere equivalente a $(n+3)(n+1) \geq n$ che è sempre vera. Pertanto la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) in $x = -1$.

Esercizio 3 Calcolare

$$\int_4^{68} \arctan\left(\sqrt[3]{x-4}\right)\, dx.$$

Svolgimento.

$$\int_4^{68} \arctan\left(\sqrt[3]{x-4}\right)\, dx = (\ x-4 = t^3\ ) = \int_0^4 \arctan(t)\, 3t^2\, dt.$$

Integro per parti

$$\int \arctan(t)\, 3t^2\, dt = t^3 \arctan t - \int \frac{t^3}{1+t^2}\, dt = t^3 \arctan t - \int \frac{t^3+t-t}{1+t^2}\, dt = t^3 \arctan t - \int t\, dt + \int \frac{t}{1+t^2}\, dt =$$

$$= t^3 \arctan t - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\log(1+t^2).$$

Da cui

$$\int_4^{68} \arctan\left(\sqrt[3]{x-4}\right)\, dx = t^3 \arctan t - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\log(1+t^2)\Big]_{t=0}^{t=4} = 64 \arctan 4 - 8 + \frac{1}{2}\log 17.$$

Esercizio 4 Determinare e disegnare nel piano di Gauss l'insieme

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \left||z-1|^2 + (z-1)^2\right| \geq \left||z-1|^2 - \overline{(z-1)}^2\right| \right\}.$$

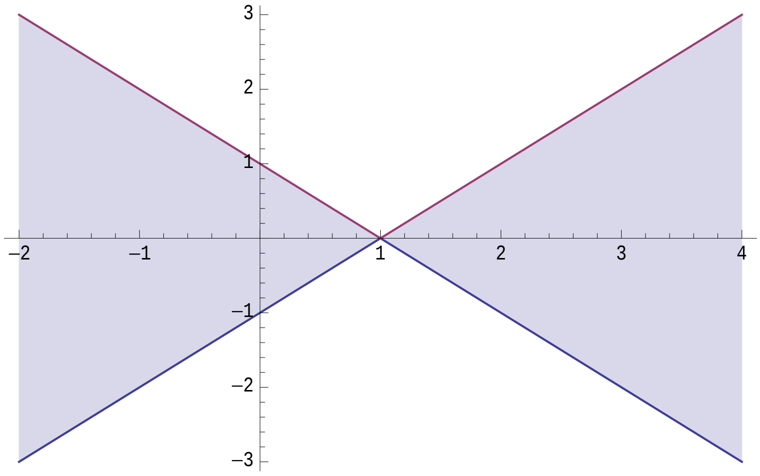

Figure 6: Esercizio 4 del Tema 3

Svolgimento. Pongo $z = x + iy$. Ottengo

$$\left||z-1|^2+(z-1)^2\right| \geq \left||z-1|^2-\overline{(z-1)}^2\right| \iff \left|(x-1)^2+y^2+(x-1+iy)^2\right| \geq |\big(x-1)^2+y^2-(x-iy-1)^2\big| \iff$$

$$\left|(x-1)^2+y^2+(x-1)^2-y^2+2i(x-1)y\right| \geq \left|(x-1)^2+y^2-(x-1)^2+y^2+2i(x-1)y\right| \iff$$

$$\left|2(x-1)^2+2i(x-1)y\right| \geq \left|2y^2+2i(x-1)y\right| \iff |x-1||(x-1)+iy| \geq |y||y+i(x-1)|$$

che è verificata in $(1, 0)$ oppure in tutti i punti del piano di Gauss tali che $|x-1| \geq |y|$.
La regione è quella colorata in figura.

TEMA 4

Esercizio 1 Si consideri la funzione
$$f(x) = (|x| - 1)\mathrm{e}^{\frac{1}{-2x+2}}.$$

1) Determinare il dominio e discutere il segno di f.
2) Calcolare i limiti significativi di f e determinarne gli asintoti.
3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.
4) Calcolare i limiti significativi di f' e studiare la derivabilità di f in $x = 0$.
5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. **Dominio.** Per l'esistenza del quoziente, deve essere $2 - 2x \neq 0$, ovvero $x \neq 1$. Dunque $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Segno. Si ha $f(x) > 0$ se e solo se $|x| - 1 > 0$. Dunque, $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Inoltre $f(x) = 0$ se e solo se $x = -1$.

Limiti. I limiti significativi sono i seguenti:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2-2x}} = +\infty \cdot \mathrm{e}^0 = +\infty.$$

Con la sostituzione $t = 1/(x-1)$ si trova

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2(1-x)}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t/2}}{t} = 0.$$

Effettivamente, nel limite precedente non c'è forma indeterminata. Analogamente, si ha

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2(1-x)}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t/2}}{t} = -\frac{1}{2}\lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{-t/2} = -\infty.$$

Abbiamo usato il Teorema di Hospital. Infine,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2-2x}} = +\infty \cdot \mathrm{e}^0 = +\infty.$$

Asintoti. Cerchiamo un eventuale asintoto obliquo a $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{2(1-x)}} = 1,$$

$$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty} x\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{2-2x}} - 1\Big) - \mathrm{e}^{\frac{1}{2-2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2-2x}(1+o(1)) - \mathrm{e}^{\frac{1}{2-2x}} = -\frac{3}{2}.$$

Dunque la retta di equazione $y = x - \frac{3}{2}$ è un asintoto abliquo a $+\infty$.

Cerchiamo un eventuale asintoto obliquo a $-\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x-1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{2(1-x)}} = -1,$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} x\big(1 - e^{\frac{1}{2-2x}}\big) - e^{\frac{1}{2-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{2-2x}(1+o(1)) - e^{\frac{1}{2-2x}} = -\frac{1}{2}.$$

Dunque la retta di equazione $y = -x - \frac{1}{2}$ è un asintoto abliquo a $-\infty$.

La retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale sinistro a $-\infty$.

Derivata. Quando $x = 0$ probabilmente la funzione non è derivabile a causa del valore assoluto $|x|$. Per $x \neq 0$ ed $x \neq 1$ la funzione è derivabile. La sua derivata è:

$$f'(x) = \frac{x}{|x|}e^{\frac{1}{2(x-1)}} + (|x|-1)e^{\frac{1}{2(1-x)}}\frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} = e^{\frac{1}{2(1-x)}}\Big[\frac{x}{|x|} + \frac{1}{2}\frac{|x|-1}{(1-x)^2}\Big].$$

Quando $x > 0$ ed $x \neq 1$ si ha

$$\Big[\frac{x}{|x|} + \frac{1}{2}\frac{|x|-1}{(1-x)^2}\Big] = \frac{2x^2-3x+1}{2(1-x)^2}.$$

Quando $x < 0$ si ha

$$\Big[\frac{x}{|x|} + \frac{1}{2}\frac{|x|-1}{(1-x)^2}\Big] = \frac{-2x^2+3x-3}{2(1-x)^2}.$$

Intervalli di monotonia. Studiamo la disequazione $f'(x) > 0$ separando i casi $x > 0$ ed $x < 0$. Quando $x > 0$ e $x \neq 1$ si ha

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 3x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1/2 \text{ oppure } x > 1.$$

Dunque:
– f è crescente nell'intervallo $[0, 1/2]$;
– f è decrescente nell'intervallo $[1/2, 1)$;
– f è crescente nell'intervallo $(1, \infty)$.

In particolare si ha $f'(1/2) = 0$ e il punto $x = 1/2$ è un punto di massimo locale. Il valore della funzione in questo punto è $f(1/2) = -e/2 < -1$.

Quando $x < 0$ si ha

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2 + 3x - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{per ogni } x < 0.$$

Dunque:
– f è decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0]$.

Deduciamo che il punto $x = 0$ è un punto di minimo locale (ma, attenzione, $f'(0)$ non è definita). Il valore della funzione in questo punto è $f(0) = -\sqrt{e} < -e/2 = f(1/2)$.

Limiti di f'. Si ha

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{2(1-x)}}\frac{2x^2-3x+1}{2(1-x)^2} = \frac{\sqrt{e}}{2},$$

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{2(1-x)}}\frac{-2x^2+3x-3}{2(1-x)^2} = -\frac{3\sqrt{e}}{2}.$$

I limiti destro e sinistro della derivata esistono finiti e sono diversi. Dunque $x = 0$ è un punto di angolo. Infine, si ha

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} e^{\frac{1}{2(1-x)}}\frac{2x^2-3x+1}{2(1-x)^2} = 0.$$

L'ultimo limite si calcola ad esempio con il cambiamento di variabile $t = 1/(1-x)$ e facendo Hospital.

Grafico di f. Ecco infine un grafico di f e dei suoi asintoti:

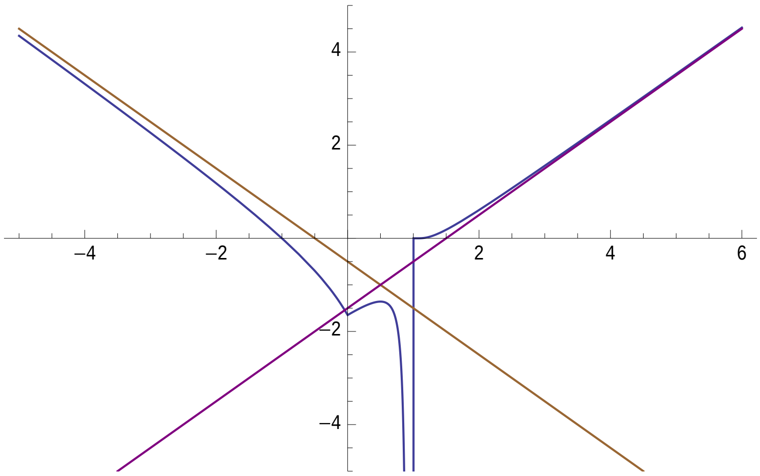

Figure 7: Il grafico di f e degli asintoti (Tema 4)

Esercizio 2 Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-3}{n(n+1)} \frac{x^n}{5^n (x+5)^n}.$$

1) Studiare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ c'è convergenza assoluta.

2) Studiare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ c'è convergenza semplice.

Svolgimento. Osserviamo preliminarmente che deve essere $x \neq -5$, perchè altrimenti il termine generale della serie non è definito. Indichiamo il termine generale con

$$a_n = \frac{n-3}{n(n+1)} \frac{x^n}{(x+5)^n}.$$

Iniziamo a studiare la convergenza assoluta. Dobbiamo stabilire per quali $x \neq -5$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n-3|}{n(n+1)} \left| \frac{x}{x+5} \right|^n.$$

Usiamo il Criterio della radice e calcoliamo il limite

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n-3}{n(n+1)} \left| \frac{x}{x+5} \right|^n} = \left| \frac{x}{x+5} \right| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n-3}{n(n+1)}} = \left| \frac{x}{x+5} \right|.$$

Quando $L(x) < 1$ la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente. Studiamo la disequazione (sempre per $x \neq -5$)

$$L(x) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{x}{x+5} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < |x+5| \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < (x+5)^2$$

L'ultima disequazione è equivalente a $10x+25 > 0$ ovvero $x > -5/2$. Per tali x c'è sia convergenza semplice che assoluta.

Quando $x < -5/2$ si ha $L(x) > 1$ e dunque, per il Criterio della radice, si ha

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty,$$

e di conseguenza $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (oppure il limite non esiste). Mancando la condizione necessaria di convergenza, la serie non converge nè semplicemente nè assolutamente.

Esaminiamo il caso $x = -5/2$, quando $L(x) = 1$. In questo caso la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-3}{n(n+1)}.$$

Per confronto asintotico con la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$ la serie non converge assolutamente.

Proviamo che converge semplicemente con il Criterio di Leibniz. Infatti, detta $b_n = \frac{n-3}{n(n+1)}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n(n+1)} = 0.$$

Inoltre, la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente decrescente:

$$b_{n+1} < b_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-2}{(n+2)(n+1)} < \frac{n-3}{n(n+1)} \quad \Leftrightarrow \quad n(n-2) < (n-3)(n+2) \quad \Leftrightarrow \quad n > 6.$$

Esercizio 3 Calcolare

$$\int_5^{130} \arctan\left(\sqrt[3]{x-5}\right)\, dx.$$

Svolgimento. Con la sostituzione $y = \sqrt[3]{x-5}$ ovvero $x = y^3 + 5$, il differenziale si trasforma in questo modo: $dx = 3y^2 dy$. Gli estremi di integrazione vanno modificati come segue: $x = 5 \;\to\; y = 0$ e $x = 130 \;\to\; y = 5$. Dunque, per il Teorema di integrazione per sostituzione, si ha

$$I = \int_5^{130} \arctan\left(\sqrt[3]{x-5}\right)\, dx = \int_0^5 3y^2 \arctan y\, dy.$$

L'ultimo integrale si calcola per parti:

$$\begin{aligned}
I &= \Big[y^3 \arctan y\Big]_{y=0}^{y=5} - \int_0^5 \frac{y^3}{1+y^2} dy \\
&= 125 \arctan 5 - \int_0^5 \left[y - \frac{1}{2}\frac{2y}{1+y^2}\right] dy \\
&= 125 \arctan 5 - \left[\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+y^2)\right]_{y=0}^{y=5} \\
&= 125 \arctan 5 - \frac{25}{2} + \frac{1}{2}\log 26.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Determinare e disegnare nel piano di Gauss l'insieme

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,:\, \left||z+1|^2 + (z+1)^2\right| \geq \left||z+1|^2 - \overline{(z-+1)}^2\right|\right\}.$$

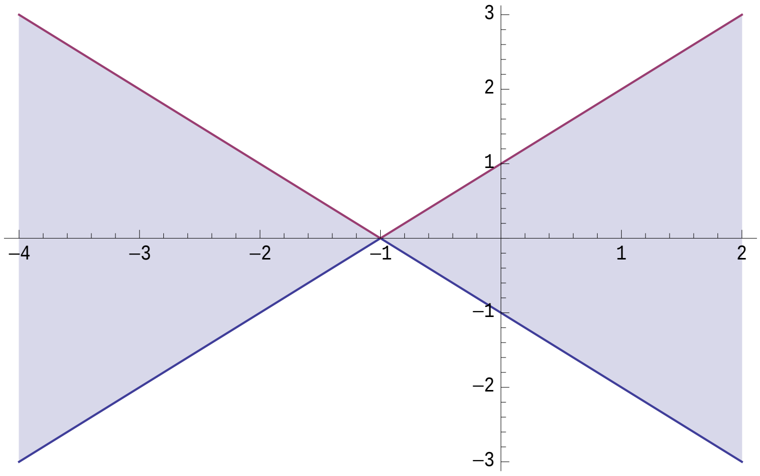

Figure 8: Esercizio 4 del Tema 3

Svolgimento. Dobbiamo determinare l'insieme delle $z \in \mathbb{C}$ che risolvono la disequazione

$$\big||z+1|^2 + (z+1)^2\big| \geq \big||z+1|^2 - \overline{(z+1)}^2\big|.$$

Usando la formula per il modulo $|z|^2 = z\bar{z}$, la disequazione è equivalente a

$$\big|(z+1)\overline{(z+1)} + (z+1)^2\big| \geq \big|(z+1)\overline{(z+1)} - \overline{(z+1)}^2\big|.$$

Raccogliendo $z+1$ a sinistra e $\overline{z+1}$ a destra, e usando il fatto che il modulo del prodotto è uguale al prodotto dei moduli, si trova la disequazione equivalente

$$|z+1| \cdot \big|\overline{z+1} + z + 1\big| \geq |\overline{z+1}| \cdot \big|z + 1 - \overline{(z+1)}\big|.$$

Osserviamo che $|z+1| = |\overline{z+1}|$. Inoltre, il numero $z = -1$ è una soluzione (si trova in effetti l'identità $0 = 0$). Cerchiamo le soluzioni $z \neq -1$. In questo caso possiamo dividere per $|z+1| \neq 0$ ed ottenere la disequazione equivalente

$$\big|z + \bar{z} + 2\big| \geq \big|z - \bar{z}\big|.$$

Scrivendo z in forma algebrica $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si ottiene infine $|2x+2| \geq |2iy|$, ovvero $|x+1| \geq |y|$. Il grafico della funzione $\phi(x) = |x+1|$ è un angolo con vertice in $x = -1$ ed $y = 0$. Le soluzioni sono i punti del piano di Gauss $x + iy \in \mathbb{C}$ tali che $-\phi(x) \leq y \leq \phi(x)$.

La regione è quella colorata in figura.