ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 15.07.2013

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\cosh x - \log|\sinh x - 1|.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.

2) Calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.

3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo relativi o assoluti.

4) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento.

1) Il dominio della funzione é dato da $\sinh x \neq 1$ cioé $x \neq \log\left(1+\sqrt{2}\right)$. Per quanto riguarda il segno, la funzione é positiva se e solo se $\log \dfrac{\cosh x}{|\sinh x - 1|} > 0$ quindi se e solo se $\dfrac{\cosh x}{|\sinh x - 1|} > 1$ che é equivalente a $e^{2x} + 1 > |e^{2x} - 2e^x - 1|$. Per $x > \log(1+\sqrt{2})$ la disuguaglianza é evidente e quindi la funzione é positiva. Per $x < \log(1+\sqrt{2})$ la disuguaglianza sopra diventa $e^x - 1 > 0$ cioé $x > 0$. In definitiva $f(x) > 0$ se e solo se $x > 0$.

2) Vediamo i limiti significativi. É immediato vedere che

$$\lim_{x\to\log(1+\sqrt{2})} f(x) = +\infty$$

abbiamo ora

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{e^{2x}+1}{|e^{2x} - 2e^x - 1|}\right) = 0$$

perché sia a $+\infty$ che a $-\infty$ l'argomento del log tende a 1. Per quanto calcolato la retta $y = 0$ é asintoto orizzontale, mentre la retta $x = \log(1+\sqrt{2})$ é asintoto verticale completo.

3) La funzione é evidentemente continua e derivabile nel suo dominio, cioé in $\dfrac{\mathbb{R}}{\log(1+\sqrt{2})}$. Un calcolo facile mostra che

$$f'(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} - \frac{\cosh x)}{\sinh x - 1} = \frac{1+\sinh x}{\cosh x(1-\sinh x)}$$

Per $x > \log(1+\sqrt{2})$, evidentemente $f'(x) < 0$ e quindi la funzione é decrescente (strettamente). Per $x \in \left(0, \log(1+\sqrt{2})\right)$ é sempre evidente che $f'(x) > 0$ e quindi la funzione é crescente, Per $x < 0$ il segno é determinato da $1 + \sinh x$. E perció la funzione é crescente se e solo se $e^{2x} + 2e^x - 1 > 0$ cioé $x \in (\log(\sqrt{2}-1), 0)$, Prció $x = \log(\sqrt{2}-1)$ é un punto di minimo (assoluto).

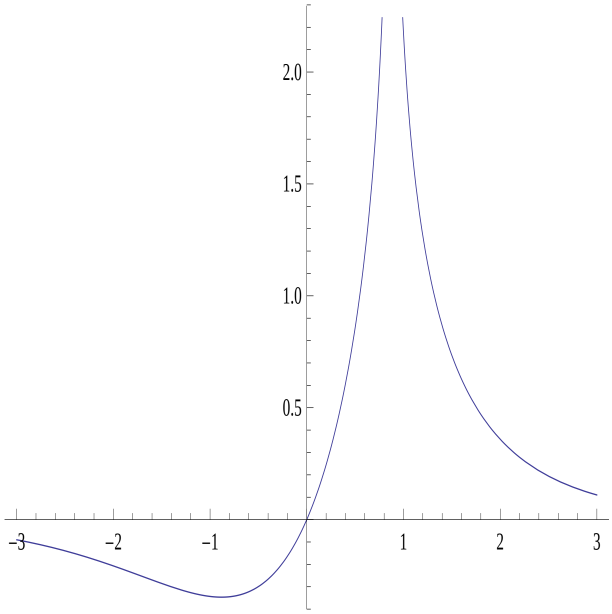

Figure 1: Grafico funzione $f(x) = \log\cosh x - \log|\sinh x - 1|$. .

Esercizio 2
a) Dato il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0, \tag{1}$$

calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 + \log(n!) + \cos n\right) \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1)\right).$$

b) [FACOLTATIVO] Dimostrare (1).
Svolgimento. Si ha

$$\log(n!) = \log n + \log(n-1) + \ldots + \log 2 = \sum_{k=1}^{n} \log k \le n\log n.$$

Siccome $\log n = o(n)$ per $n \to \infty$, allora $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0$.
Da (1) e dal fatto che $\cos n$ è limitato, e quindi $\cos n = o(n^2)$ per $n \to \infty$, si ha subito che

$$n^2 + \log(n!) + \cos n \sim n^2 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Si ha inoltre, per $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(\log n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{\log n}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

siccome $\log n/n^3 = o(n^3)$. Analogamente, si ha

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) &= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(\log n-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \frac{\log n}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

per $n \to \infty$. Quindi

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1)-\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) = \frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

per $n \to \infty$. In sintesi, si ha

$$\begin{aligned}
\left(n^2+\log(n!)+\cos n\right)\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1)-\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1)\right) &= \left(n^2+o(n^2)\right)\left(\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\to 2 \quad \text{per } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Esercizio 3
a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2\alpha x}-1}{e^{2x}+1}dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Calcolarlo per $\alpha = 1/2$.
Svolgimento. a) L'integranda è continua ed ha segno costante in $[0, +\infty)$, per cui la convergenza può essere studiata mediante il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x \to +\infty$,

$$\frac{e^{2\alpha x}-1}{e^{2x}+1} \sim \frac{1}{e^{2(1-\alpha)x}}$$

e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2(1-\alpha)x}}dx < +\infty$$

se e solo se $\alpha < 1$. Quindi l'integrale richiesto converge se e solo se $\alpha < 1$.
b) Ponendo $t = \log x$ si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{x}-1}{e^{2x}+1}dx = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{(t^2+1)t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^3+t}dt.$$

Utilizzando la scomposizione

$$\frac{t-1}{t^3+t} = \frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{-1}{t}+\frac{t+1}{t^2+1},$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^3+t}dt &= \int_1^{+\infty} \frac{-1}{t}+\frac{t+1}{t^2+1}\,dt\\
&= \int_1^{+\infty} \frac{-1}{t}+\frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\,dt\\
&= \lim_{t\to+\infty}\log\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}-\frac{\log 2}{2}+\frac{\pi}{4}\\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{\log 2}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^5 = -16\overline{z}$$

esprimendole prima in forma trigonometrica/esponenziale e poi in forma algebrica; disegnarle infine sul piano di Gauss.

Svolgimento. Poniamo $z = \rho e^{i\vartheta}$. Chiaramente $z = 0$ è una soluzione, per cui cerchiamo le soluzioni non nulle. Prendendo il modulo di entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$\rho^5 = 16\rho,$$

da cui $\rho = 2$, cioè $z = 2e^{i\vartheta}$. Quindi

$$2^5 e^{5i\vartheta} = 2^4 e^{i\pi} 2e^{-i\vartheta},$$

da cui

$$e^{6i\vartheta} = e^{i\pi},$$

cioè

$$\vartheta = \pi/6 + k\pi/3, \quad k = 0, \ldots, 5.$$

Quindi le soluzioni non nulle dell'equazione sono

$$2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i,\ 2e^{i\pi/2} = 2i,\ 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3} + i,$$
$$2e^{i7\pi/6} = -\sqrt{3} - i,\ 2e^{3i\pi/2} = -2i,\ 2e^{i11\pi/6} = \sqrt{3} - i$$

(v. figura).

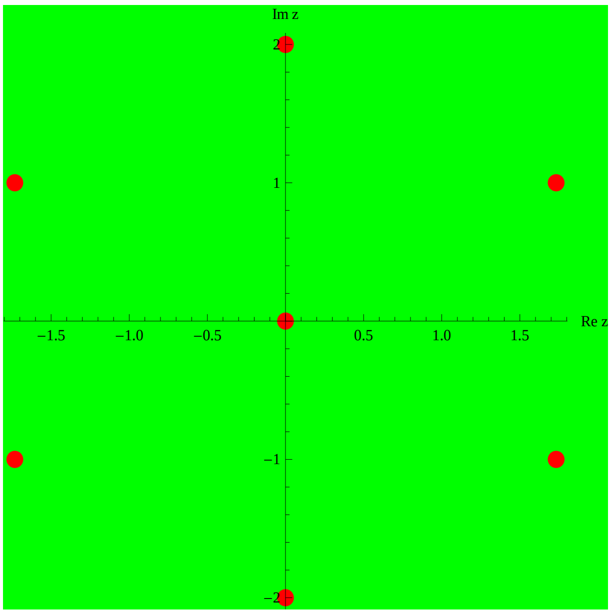

Figure 2: Soluzione esercizio 4 Tema 1.

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log|\sinh x - 2| - \log\cosh x.$$

1) Determinare il dominio di f e discuterne il segno.
2) Calcolare i limiti significativi e gli eventuali asintoti di f.
3) Calcolare f', determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo relativi o assoluti.
4) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

Svolgimento. Il dominio di f è $\{x \in \mathbb{R} : \sinh x \neq 2\}$. Risolvendo l'equazione

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2$$

si ottiene

$$e^{2x} - 4e^x - 1 = 0,$$

la cui unica soluzione è $\log(2+\sqrt{5})$. Il dominio pertanto è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \log(2+\sqrt{5})\}$.
Il segno di f è positivo, per $x > \log(2+\sqrt{5})$, se e solo se

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} - 2 \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

cioè mai. Per $x < \log(2+\sqrt{5})$ invece il segno è positivo se e solo se

$$2 - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geq \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

cioè se e solo se $x \leq \log 2$ (che è $< \log(2+\sqrt{5})$).
Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2} - 2}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \log \frac{e^x - e^{-x} - 4}{e^x + e^{-x}} = \log 1 = 0,$$

quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \log \frac{2 - \frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to-\infty} \log \frac{4 - e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \log 1 = 0,$$

quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Infine si ha

$$\lim_{x\to\log(2+\sqrt{5})} f(x) = -\infty,$$

cioè $x = \log(2+\sqrt{5})$ è asintoto verticale.
La funzione è visibilmente derivabile in tutto il dominio e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\cosh x}{\sinh x - 2} - \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x + 2\sinh x}{(\sinh x - 2)\cosh x} = \frac{1+2\sinh x}{(\sinh x-2)\cosh x} & \text{per } x > \log(2+\sqrt{5}) \\ \frac{-\cosh x}{2-\sinh x} - \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{1+2\sinh x}{(\sinh x-2)\cosh x} & \text{per } x < \log 2 + \sqrt{5}). \end{cases}$$

Il segno di f' è visibilmente positivo per $x > \log(2+\sqrt{5})$, mentre per $x < \log(2+\sqrt{5})$ è negativo se e solo se $1 + 2\sinh x < 0$, cioè se e solo se $x > \log(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$. Quindi $x = \log(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ è un punto di massimo locale stretto. Il grafico è come in figura.

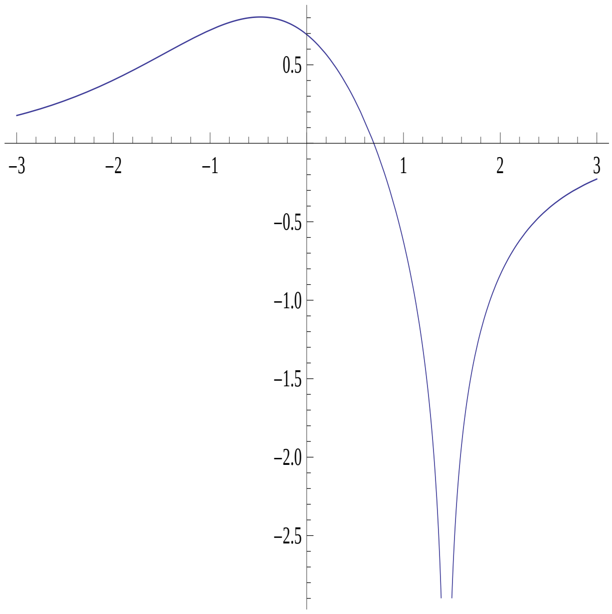

Figure 3: Grafico funzione $f(x) = \log|\sinh x - 2| - \log\cosh x$. .

Esercizio 2

a) Dato il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0, \tag{1}$$

calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 + \log(n!) + \sin n\right)\left(\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1)\right).$$

b) [FACOLTATIVO] Dimostrare (1).

Svolgimento. Si ha

$$\log(n!) = \log n + \log(n-1) + \ldots + \log 2 = \sum_{k=1}^{n} \log k \leq n \log n.$$

Siccome $\log n = o(n)$ per $n \to \infty$, allora $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0$.

Da (1) e dal fatto che $\sin n$ è limitato, e quindi $\sin n = o(n^2)$ per $n \to \infty$, si ha subito che

$$n^2 + \log(n!) + \sin n \sim n^2 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Si ha inoltre, per $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) &= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(\log n - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{\log n}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

siccome $\log n/n^3 = o(n^3)$. Analogamente, si ha

$$\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left(\log n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{\log n}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

per $n \to \infty$. Quindi

$$\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1) = -\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

per $n \to \infty$. In sintesi, si ha

$$\left(n^2 + \log(n!) + \sin n\right)\left(\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\log(n-1) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\log(n+1)\right) = \left(n^2 + o(n^2)\right)\left(-\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$\to -2 \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Esercizio 3

a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{3 - e^{\alpha x}}{e^{2x} + 2} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Calcolarlo per $\alpha = 1$.

Svolgimento. a) L'integranda è continua ed ha segno definitivamente costante per $x \to +\infty$), per cui la convergenza può essere studiata mediante il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x \to +\infty$,

$$\frac{3 - e^{\alpha x}}{e^{2x} + 3} \sim \frac{-1}{e^{(2-\alpha)x}}$$

e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{(2-\alpha)x}} dx < +\infty$$

se e solo se $\alpha < 2$. Quindi l'integrale richiesto converge se e solo se $\alpha < 2$.

b) Ponendo $t = \log x$ si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{3 - e^{x}}{e^{2x} + 3} dx = \int_1^{+\infty} \frac{3 - t}{(t^2 + 3)t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{3 - t}{t^3 + 3t} dt.$$

Utilizzando la scomposizione

$$\frac{3 - t}{t^3 + 3t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 3} = \frac{1}{t} - \frac{t + 1}{t^2 + 3},$$

si ottiene

$$\int_1^{+\infty} \frac{3 - t}{t^3 + 3t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{t+1}{t^2 + 3}\, dt$$
$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{2t}{t^2 + 3} - \frac{1}{t^2 + 3}\, dt$$
$$= \lim_{t \to +\infty} \log \frac{t}{\sqrt{t^2 + 3}} + 2\log 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}$$
$$= 2\log 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = -2(1+\sqrt{3}i)\overline{z}$$

esprimendole prima in forma trigonometrica/esponenziale e poi in forma algebrica; disegnarle infine sul piano di Gauss.

Svolgimento. Poniamo $z = \rho e^{i\vartheta}$. Chiaramente $z = 0$ è una soluzione, per cui cerchiamo le soluzioni non nulle. Prendendo il modulo di entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$\rho^3 = 4\rho,$$

da cui $\rho = 2$, cioè $z = 2e^{i\vartheta}$. Quindi

$$2^3 e^{3i\vartheta} = 4e^{4i\pi/3} 2e^{-i\vartheta},$$

da cui

$$e^{4i\vartheta} = e^{4i\pi/3},$$

cioè

$$\vartheta = \pi/3 + k\pi/2, \quad k = 0, \ldots, 3.$$

Quindi le soluzioni non nulle dell'equazione sono

$$2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3},\ 2e^{5i\pi/6} = -\sqrt{3} + i,$$
$$e^{i4\pi/3} = -1 - i\sqrt{3}, e^{i11\pi/6} = \sqrt{3} - i$$

(v. figura).

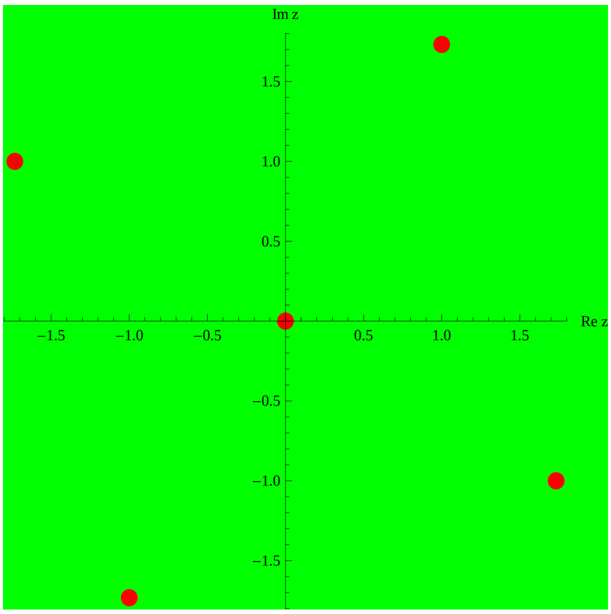

Figure 4: Soluzione esercizio 4 Tema 2.