$\arcsin(\sqrt{x}-1)$ $\qquad$ $\int_0^4 \arcsin(\sqrt{x}-1)$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x(\lg^\alpha x+1)}\,dx \qquad \alpha = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^k - \lg(1+x^2)}$$

$$n \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) - \sqrt{1-\frac{1}{n}}$$

$$n \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right.$$

Es Calcolare al variare di k il limite

1) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^k - \lg(1+x^2)}$$

2) dire per quali k è finito l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^k - \lg(1+x^2)} \, dx$$

N: $e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x$ utilizzo polinomi di Taylor

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right] =$$

$$= \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) - \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$= x^4\left(\frac{1}{12} + o(1)\right)$$

$$D: \; x^k - \lg(1+x^2)$$

$$\lg(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\lg(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}(x^2)^2 + o(x^2)^2 = \underbrace{x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}$$

$$x^k - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) =$$

($x \to 0$ RACCOLGO TERMINE DI GRADO MINIMO)

$$= \begin{cases} k=2 & \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = x^4\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \\ k>2 & x^2\left[\frac{x^k}{x^2} - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right] = x^2\left[-1 + o(1)\right] \\ k<2 & x^k\left[1 - \frac{x^2}{x^k} + \frac{1}{2}\frac{x^4}{x^k} + o\left(\frac{x^4}{x^k}\right)\right] = x^k\left[1 + o(1)\right] \end{cases}$$

Metto insieme

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^k - \lg(1+x^2)}\, dx < +\infty \quad \forall k}$$

$\boxed{k=2}$

$$\frac{\cancel{x^4}\left(\frac{1}{12}+o(1)\right)}{\cancel{x^4}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)} = \frac{\left(\frac{1}{12}+o(1)\right)}{\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)} \xrightarrow{x\to 0} \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}\cdot 2 = \frac{1}{6}$$

$\boxed{k>2}$

$$\frac{x^{\cancel{4}\,2}\left(\frac{1}{12}+o(1)\right)}{\cancel{x^2}\left(-1+o(1)\right)} = \frac{x^2\left(\frac{1}{12}+o(1)\right)}{\left(-1+o(1)\right)} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

$\boxed{k<2}$

$$\frac{x^4\left(\frac{1}{12}+o(1)\right)}{x^k\left(1+o(1)\right)} = \frac{x^{4-k}\left(\frac{1}{12}+o(1)\right)}{\left(-1+o(1)\right)} \longrightarrow 0$$

Es Dire per quali α converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha} \left| \left[\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right) \right] \right|$$

Stessa soluzione è per l'esercizio
dire per quali α è finito l'integrale

$$\int_{1}^{+\infty} x^{2} \left| \frac{3}{\sqrt{x}} - \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right) \right| dx$$

$$x \to 0$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3} x^3 + o(x^3)$$

$$(\sqrt{n})^3 = n^{3/2}$$

$$\sqrt{n} = n^{1/2}$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right) = \frac{3}{\sqrt{n}} - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^3 + o\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^3 \stackrel{\cdots}{=}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{n}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{(\sqrt{n})^3} + o\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^3}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{3}{n^{1/2}}} - 9\,\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$$n^\alpha \left[\cancel{\frac{3}{n^{1/2}}} - \cancel{\frac{3}{n^{1/2}}} + 9\,\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right] = n^\alpha \frac{1}{n^{3/2}} \left[9 + o(1)\right]$$

$$a_n = n^{\alpha} \frac{1}{n^{3/2}} [9 + o(1)] =$$

$$= \frac{1}{n^{3/2 - \alpha}} [9 + o(1)]$$

(analogamente $f(x) = x^2 \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{x}} \right) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{1}{x^{3/2 - \alpha}} [9 + o(1)]$

criterio del confronto asintotico: la serie converge (o l'integrale è finito) se e solo se

$$\frac{3}{2} - \alpha > 1 \qquad -\alpha > -\frac{1}{2} \qquad \boxed{\alpha < \frac{1}{2}}$$

ES Studiare convergenza assoluta e semplice di:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{(x-2)^n}{4^n}$$

$$a_n = \underbrace{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} \cdot \frac{(x-2)^n}{4^n} \qquad |a_n| = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \frac{|x-2|^n}{4^n}$$

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq 1 < \frac{\pi}{2} \qquad \left|\sin \frac{1}{n^2}\right| = \sin \frac{1}{n^2}$$

criterio RADICE n-esima

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} \frac{\sqrt[\cancel{n}]{|x-2|^{\cancel{n}}}}{\sqrt[\cancel{n}]{4^{\cancel{n}}}}$$

$$\sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(1+o(1)\right)$$

$$\left[\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}} = \Big[\underbrace{\frac{1}{n^2}\left(1+o(1)\right)}\Big]^{\frac{1}{n}} =$$

$$a^b = e^{b \lg a}$$

$$= e^{\underset{\downarrow}{\underset{0}{\frac{1}{n}}} \underbrace{\lg\left(\frac{1}{n^2}\left(1+o(1)\right)\right)}_{\substack{\downarrow \\ -\infty}}} = e^{\frac{\lg\left(\frac{1}{n^2}(1+o(1))\right) \to -\infty}{n \to +\infty}} \to e^0 = 1$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x-2|}{4}$$

$$\lim_{n} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x-2|}{4} = L$$

criterio radice n-esima dice che

1) se $L > 1$ la serie diverge

$$\frac{|x-2|}{4} > 1 \qquad |x-2| > 4 \qquad \begin{matrix} x-2>4 \\ x-2<-4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x>6 \\ x<-2 \end{matrix}$$

2) se $L < 1$ la serie converge

$$\frac{|x-2|}{4} < 1 \longrightarrow -2 < x < 6$$

3) se $L = 1$ il criterio NON DÀ INFORMAZIONI

$$\frac{|x-2|}{4} = 1 \longrightarrow x = -2 , \quad x = 6$$

Se $-2 < x < 6$ la serie converge ASSOLUTAMENTE (con i valori assoluti) e quindi anche SEMPLICEMENTE (senza valori assoluti)

Se $x > 6$, oppure $x < -2$ la serie con i valori assoluti DIVERGE

la serie senza valori assoluti cosa fa?

$x > 6$
$\frac{x-2}{4} > 1$

$x < -2$
$\frac{x-2}{4} < -1$

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \frac{(x-2)^n}{4^n} = \frac{1}{n^2}\left(1+o(1)\right) \left(\frac{x-2}{4}\right)^n =$$

$$= \left(1+o(1)\right) \frac{\left(\frac{x-2}{4}\right)^n}{n^2} \begin{cases} \to +\infty & \text{se } x > 6 \\ \text{NON ESISTE} & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

in entrambi i casi $\lim_n a_n$ **NON È ZERO**

quindi la serie senza valori assoluti

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$ NON PUÒ CONVERGERE

(non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza) per $x=-2$, $x=6$ devo prendere la serie di potenza e sostituire il valore $x=6$ oppure $x=-2$

$\boxed{x=6}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \frac{\cancel{(6-2)^n}}{\cancel{4^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\left(1+o(1)\right)$

per il criterio confronto asintotico dato che $\alpha = 2 > 1$ la serie converge se $x = -2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{-2-2}{4^n}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{(-4)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)(-1)^n \frac{\cancel{(4)^n}}{\cancel{4^n}}$$

$-2 \leq x \leq 6$

LA SERIE CONVERGE SIA ASSOLUTAMENTE CHE SEMPLICI.

$x > 6$ LA SERIE NON CONVERGE
$x < -2$

Studio serie coi valori assoluti

$$\left|\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)(-1)^n\right| = \sin\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left(1 + o(1)\right)$$

la serie converge per confronto asintotico.

Es studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\sqrt{|x|} - 1\right)$$

1) [dominio, simmetrie, segno]

$|x| \geq 0 \Rightarrow \sqrt{|x|}$ è sempre ben definito

arcoseno è definito se l'argomento è compreso tra -1 e 1

$$-1 \leq \sqrt{|x|} - 1 \leq 1$$

$$\begin{cases} \sqrt{|x|} - 1 \leq 1 \\ \sqrt{|x|} - \cancel{1} \geq -\cancel{1} \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\sqrt{|x|}\right)^2 \leq (2)^2 \rightarrow |x| \leq 4 \Rightarrow \boxed{-4 \leq x \leq 4} \\ \sqrt{|x|} \geq 0 \quad \text{sempre vero} \end{cases}$$

$|x| \leq a$

$\begin{cases} x \leq a \\ x \geq -a \end{cases}$

$D = [-4, 4]$

(non studio limiti all'infinito e asintoti orizzontali e obliqui)

$f(x) = \arcsin\left(\sqrt{|x|} - 1\right)$

$f(-x) = \arcsin\left(\sqrt{|-x|} - 1\right) = \arcsin\left(\sqrt{|x|} - 1\right) = f(x)$

f è PARI

<u>segno</u>

$f(x) \geq 0$

$\arcsin\left(\sqrt{|x|} - 1\right) \geq 0 \implies \sqrt{|x|} - 1 \geq 0$

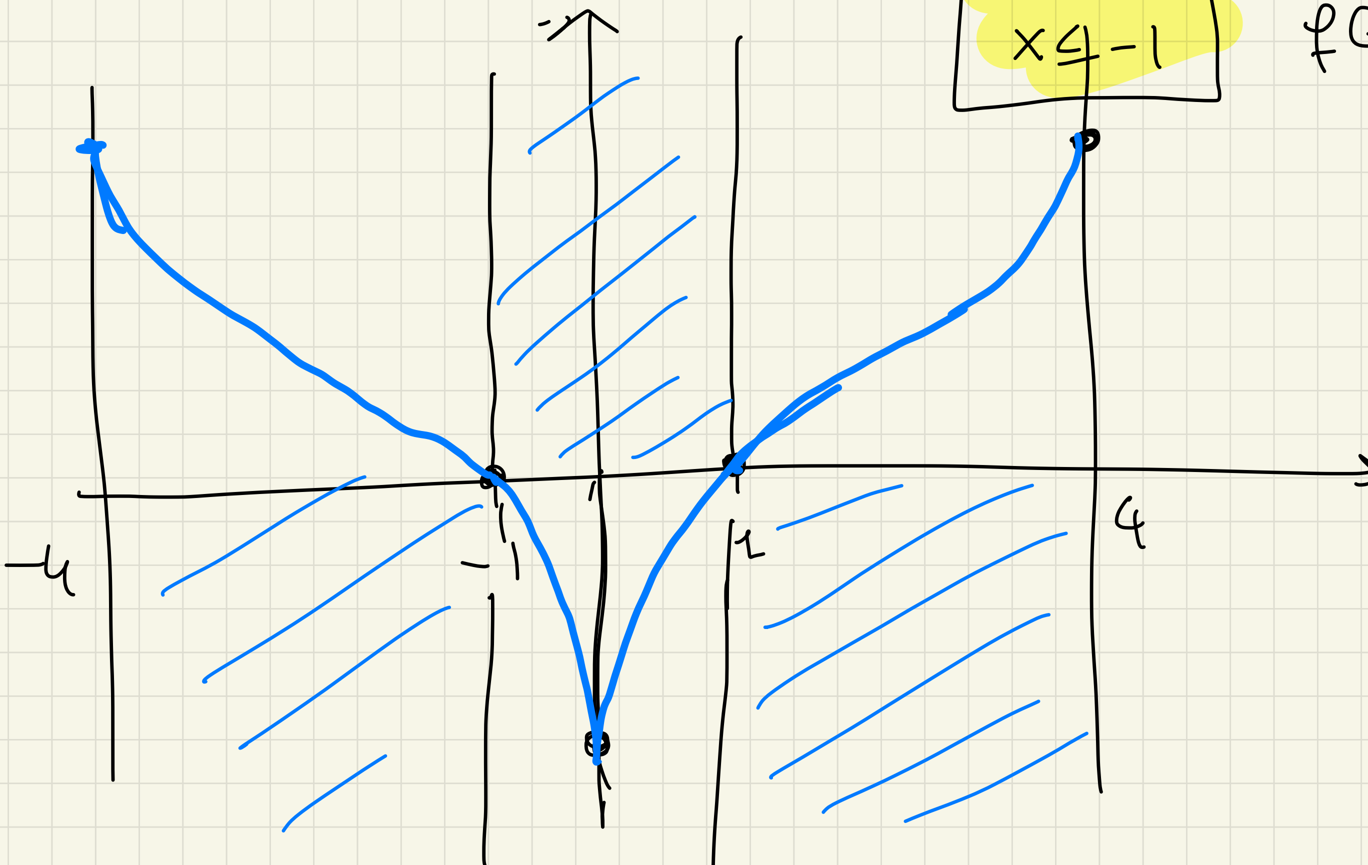
$\sqrt{|x|} \geq 1 \qquad |x| \geq 1$

$f(x) \geq 0 \iff \sqrt{|x|} \geq 1 \qquad |x| \geq 1$

$$\boxed{\begin{matrix} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{matrix}}$$

$f(1) = \arcsin 0$
$= 0$

$f(-1) = \arcsin 0$
$= 0$



Non devo calcolare nessun limite perché la funzione è continua in $[-4,4]$.

Derivata

$$f(x) = \arcsin\left(\sqrt{|x|} - 1\right)$$

$x > 0 \quad |x| = x \rightarrow f(x) = \arcsin\left(\sqrt{x} - 1\right)$

$x < 0 \quad |x| = -x \rightarrow f(x) = \arcsin\left(\sqrt{-x} - 1\right)$

$0 < x \leq 4$

$(x \in D = [-4, 4]$

$f(x) = \arcsin(\underbrace{\sqrt{x} - 1})$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x} - 1)^2}} \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\sqrt{x}} =$

$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' =$

$= \dfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{\cancel{1} - \underbrace{x} - \cancel{1} + 2\sqrt{x}}} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} =$

$= \dfrac{1}{2} x^{-1/2} =$

$= \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{x} - x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} =$

$=$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}}\sqrt{2-\sqrt{x}}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \underbrace{\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{2x^{1/2}}}$$

$$\sqrt{\sqrt{x}} = \left(x^{1/2}\right)^{1/2} = x^{1/4}$$

$$0 < x \leq 4$$

$0 < x < 4$ $\quad f'(x) > 0$ $\quad$ (f crescente)

$$\lim_{x\to 4^-} f'(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{x^{1/4}\sqrt{2-\sqrt{x}}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

$x^{1/4} \to \sqrt{2}$, $\quad \sqrt{2-\sqrt{x}} \to 0^+$, $\quad \sqrt{x} \to 4$

f non è derivabile in $x=4$ e ha un attacco verticale

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{1/4}\sqrt{2-\sqrt{x}}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

$-4 < x < 0$

$x = -(\sqrt{-x})^2$

$f(x) = \arcsin\left(\sqrt{-x} - 1\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{-x}-1)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{-x}} \cdot (-1) = \frac{-1}{\sqrt{2\sqrt{-x}+x} \quad 2\sqrt{-x}}$$

$\sqrt{-x}(2-\sqrt{-x})$

$$= \frac{-1}{\sqrt[4]{-x}\,\sqrt{2-\sqrt{-x}}\;2\sqrt{-x}}$$

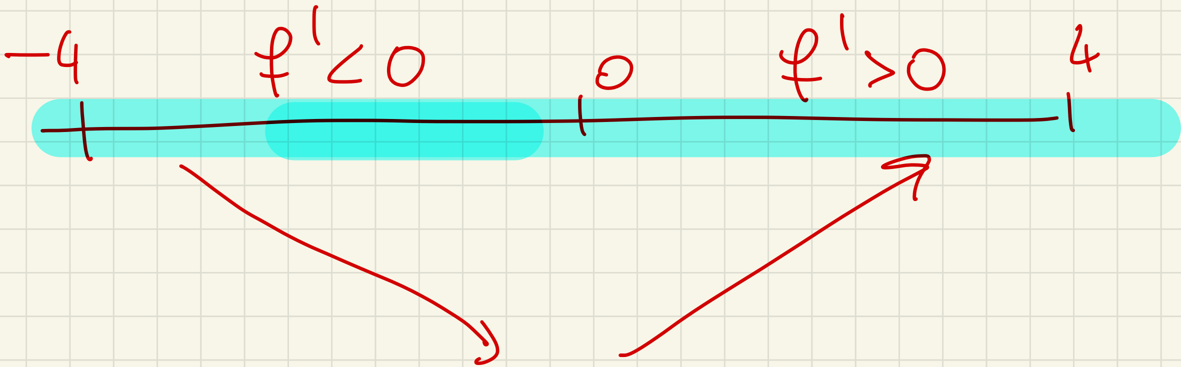
$f'(x) < 0 \quad -4 < x < 0 \qquad f$ è decrescente

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -4^+} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty$$

$x=0$ è pto di CUSPIDE



$x=0$ pto di MINIMO LOCALE (ma anche assoluto)

$x=4$, $x=-4$ pti di MASSIMO LOCALE (e anche assoluto)