UNIVERSITA' DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Tutorato di Analisi Matematica I

Docente del corso: prof. B.Bianchini

Argomento:

Integrazione secondo Riemann: integrali definiti, indefiniti e generalizzati.

Tutor: Guido Costagliola

Email: guido.costagliola@studenti.unipd.it

Anno Accademico: 2024/2025

"Mathematicians have never been in full agreement on their science,
though it is said to be the science of self-evident verities
— absolute, indisputable and definitive.
They have always been in controversy over the developing
aspects of mathematics."

-H. Lebesgue

1 Integrali propri: definiti ed indefiniti

1.1 Esercizio 1: Integrazione per sostituzione

Calcolare i seguenti integrali indefiniti utilizzando il metodo di sostituzione.

$$(a) \quad \int \cos x e^{2\sin x}\, dx \qquad (b) \quad \int \frac{x\log x + 1}{x^2}\, dx$$

1.2 Esercizio 2: Integrazione per parti

Calcolare i seguenti integrali indefiniti utilizzando il metodo di integrazione per parti.

$$(a) \quad \int (x^3+1)\log x\, dx \qquad (b) \quad \int 2x \arcsin x\, dx$$

1.3 Esercizio 3: Metodo dei fratti semplici

Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali fratte sfruttando il *metodo dei fratti semplici*.

$$(a) \quad \int \frac{dx}{x^2(x^2-3x+2)} \qquad (b) \quad \int \frac{x-2}{x(x^2+4)}\, dx$$

1.4 Esercizio 4: Integrali definiti

Calcolare il valore dei seguenti integrali definiti.

$$(a) \quad \int_0^{\frac{5}{4}} \frac{x+\sqrt{x+1}}{2x-3\sqrt{x+1}}\, dx \qquad (b) \quad \int_0^1 \frac{e^x+2}{e^x(e^x+1)}\, dx$$

2 Integrali impropri o generalizzati

2.1 Esercizio 1: Convergenza di integrali

Studiare la convergenza dei seguenti integrali al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(a) \quad \int_0^{+\infty} \frac{(e^x-\cos x)^\alpha + e^x - 1}{e^{2x}+4e^x+3e^{\alpha x}}\, dx \qquad (b) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x)^{\alpha+2}}\, dx$$

Soluzioni

Integrali propri: definiti ed indefiniti

Esercizio 1

(a) Una sostituzione utile in questo caso è:

$$\sin x = t, \qquad \cos x dx = dt$$

Con questa sostituzione l'integrale diventa:

$$\int e^{2t}\, dt = \frac{e^{2t}}{2} + c = \frac{e^{2\sin x}}{2} + c$$

con $c \in \mathbb{R}$.

(b) Una sostituzione utile in questo caso è:

$$\log x = t \iff x = e^t, \qquad \frac{1}{x}dx = dt$$

Con questa sostituzione l'integrale diventa:

$$\int \frac{te^t + 1}{e^t}\, dt = \int \left(t + e^{-t}\right)\, dt = \frac{t^2}{2} - e^{-t} + c = \frac{\log^2 x}{2} - \frac{1}{x} + c$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2

Un utile metodo per ricordare la formula di integrazione per parti è la seguente. Siano F e G due funzioni e siano f e g le loro derivate. Calcolando la derivata del prodotto di F e G tramite la regola di Leibniz:

$$\frac{d}{dx}(FG) = fG + Fg \quad \Rightarrow \quad Fg = \frac{d}{dx}(FG) - fG.$$

Allora:

$$\int Fg\, dx = \int \frac{d}{dx}(FG)\, dx - \int fG\, dx = FG - \int fG\, dx$$

(a) Applichiamo la formula dell'integrazione per parti, identificando $F = \log x$ e $g = (x^3 + 1)$.

$$\int (x^3+1)\log x\, dx = \left(\frac{x^4}{4} + x\right)\log x - \int \left(\frac{x^4}{4} + x\right)\frac{1}{x}\, dx = x\left(\frac{x^3}{4} + 1\right)\log x - \int \left(\frac{x^3}{4} + 1\right)\, dx =$$

$$= x\left(\frac{x^3}{4} + 1\right)\log x - x\left(\frac{x^3}{16} + 1\right) + c$$

con $c \in \mathbb{R}$.

(b) Identifichiamo questa volta $F = \arcsin x$ e $g = 2x$. Allora:

$$\int 2x \arcsin x \, dx = x^2 \arcsin x - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Concentriamoci ora sul secondo integrale. Una sostituzione utile da applicare qui è:

$$x = \cos t \iff t = \arccos x, \quad dx = -\sin t dt$$

Effettuandola:

$$-\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\int \frac{\cos^2 t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} (-\sin t) dt = \int \frac{\cos^2 t}{\cancel{\sin t}} \cancel{\sin t} \, dt =$$
$$= \int \frac{1+\cos(2t)}{2} \, dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + c = \frac{t}{2} + \frac{\sin t \cos t}{2} + c =$$
$$= \frac{\arccos x}{2} + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + c$$

avendo utilizzato che: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ e $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.
Pertanto il risultato finale è:

$$\int 2x \arcsin x \, dx = x^2 \arcsin x + \frac{\arccos x}{2} + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + c$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

(a) Notiamo innanzitutto che $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$. Il prossimo passo è il seguente:

$$\frac{1}{x^2(x-2)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{(x-2)} + \frac{D}{(x-1)} = ... =$$
$$= \frac{(A+C+D)x^3 + (B-3A-C-2D)x^2 + (2A-3B)x + 2B}{x^2(x-2)(x-1)}$$

Bisogna allora risolvere il sistema:

$$\begin{cases} A+C+D = 0 \\ B-3A-C-2D = 0 \\ 2A-3B = 0 \\ 2B = 1 \end{cases}$$

Risolvendolo, si ottiene:

$$\begin{cases} A = \frac{3}{4} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{4} \\ D = -1 \end{cases}$$

Pertanto:

$$\int \frac{dx}{x^2(x-2)(x-1)} = \int \left(\frac{\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-2)} + \frac{-1}{(x-1)} \right) dx =$$
$$= \frac{3}{4} \int \frac{1}{x}\, dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2}\, dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-2}\, dx - \int \frac{1}{x-1}\, dx =$$
$$= \frac{3}{4} \log|x| - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \log|x-2| - \log|x-1| + c$$

con $c \in \mathbb{R}$.

(b) Dobbiamo questa volta riscrivere

$$\frac{x-2}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = ... = \frac{(A+B)x^2 + Cx + 4A}{x(x^2+4)}$$

Dunque bisogna risolvere il sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 1 \\ 4A = -2 \end{cases}$$

Ottenendo:

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = 1 \end{cases}$$

Pertanto:

$$\int \frac{x-2}{x(x^2+4)}\, dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}x + 1}{x^2+4} \right) dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x}\, dx + \frac{1}{2 \cdot 2} \int \frac{2x}{x^2+4}\, dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}}\, dx =$$
$$= -\frac{1}{2} \log|x| + \frac{1}{4} \log|x^2+4| + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

con $c \in \mathbb{R}$.
Si noti che il primo dei tre integrali nel penultimo passaggio è immediato, mentre per risolvere gli altri due è utile applicare le sostituzioni $x^2 = t$ e $\frac{x}{2} = y$ rispettivamente, e diventano degli integrali elementari.

Esercizio 4

(a) Per risolvere l'integrale è utile applicare la seguente sostituzione, in modo tale da sbarazzarci della radice:

$$\sqrt{x+1} = t \iff x + 1 = t^2, \quad dx = 2t dt$$
$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{5}{4} \Rightarrow t = \frac{3}{2} \end{cases}$$

L'integrale allora diventa:

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{t^2+t-1}{2t^2-3t-2} 2t\,dt = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{2t^3+2t^2-2t}{2t^2-3t-2}\,dt$$

Dato che il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore, per applicare il metodo dei fratti semplici è necessario prima effettuare la divisione tra i due polinomi. Il risultato che ne consegue è il seguente:

$$\frac{2t^3+2t^2-2t}{2t^2-3t-2} = \left(t+\frac{5}{2}\right) + \frac{\frac{15}{2}t+5}{2t^2-3t-2}$$

Si noti inoltre che $2t^2-3t-2 = (2t+1)(t-2)$. Allora:

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{2t^3+2t^2-2t}{2t^2-3t-2}\,dt = \int_1^{\frac{3}{2}} \left(t+\frac{5}{2}\right)\,dt + 5\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{3}{2}t+1}{(2t+1)(t-2)}\,dt$$

Il primo è un integrale elementare:

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \left(t+\frac{5}{2}\right)\,dt = \left(\frac{t^2}{2}+\frac{5}{2}t\right)_{t=1}^{t=\frac{3}{2}} = \frac{9}{8}+\frac{15}{4}-\frac{1}{2}-\frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

Per il secondo bisogna riscrivere:

$$\frac{\frac{3}{2}t+1}{(2t+1)(t-2)} = \frac{A}{2t+1}+\frac{B}{t-2} = \frac{(A+2B)t+B-2A}{(2t+1)(t-2)}$$

da cui $A=-\frac{1}{10}$ e $B=\frac{4}{5}$.
Pertanto si ottiene:

$$5\left[\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{-\frac{1}{10}}{2t+1}\,dt + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{4}{5}}{t-2}\,dt\right] = \left(-\frac{1}{4}\log|2t+1| + 4\log|t-2|\right)_{t=1}^{t=\frac{3}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{4}\log 4 + 4\log\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log 3 - \cancel{4\log 1} = -\frac{1}{2}\log 2 - 4\log 2 + \frac{1}{4}\log 3 = -\frac{9}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 3$$

Quindi alla fine:

$$\int_0^{\frac{5}{4}} \frac{x+\sqrt{x+1}}{2x-3\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{15}{8} - \frac{9}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 3$$

(b) Utilizziamo la seguente sostituzione:

$$x = \log t \iff t = e^x, \quad dx = \frac{1}{t}dt$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = e \end{cases}$$

Così l'integrale diventa:

$$\int_1^e \frac{t+2}{t(t+1)}\frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{t+2}{t^2(t+1)}\,dt$$

Bisogna pertanto ora riscrivere:

$$\frac{t+2}{t^2(t+1)} = \frac{At+B}{t^2} + \frac{C}{t+1} = \frac{(A+C)t^2+(A+B)t+B}{t^2(t+1)}$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \\ C = 1 \end{cases}$$

Allora:

$$\int_1^e \left(\frac{-t+2}{t^2} + \frac{1}{t+1} \right) dt = \int_1^e \left(-\frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= \left(-\log|t| - \frac{2}{t} + \log|t+1| \right)_{t=1}^{t=e} = \log(1+e) + 1 - \frac{2}{e} - \log 2.$$

Integrali impropri o generalizzati

Esercizio 1

Da ricordare:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

converge se e solo se $\alpha < 1$;

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

converge se e solo se $\alpha > 1$.
In questo genere di esercizi bisogna prima riconoscere dove la funzione integranda presenta delle patologie attorno ad un punto del dominio di integrazione ed, eventualmente, studiarne il comportamento a $\pm\infty$. Importante da ricordare è che è possibile utilizzare gli sviluppi in serie di Taylor anche in questa tipologia di esercizi. Vediamo adesso come.

(a) In questo caso la funzione presenta dei problemi in $x = 0$, in particolare per valori $\alpha < 0$, e a $+\infty$. Possiamo dunque studiare separatamente la convergenza dei seguenti due integrali:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(e^x - \cos x)^\alpha + e^x - 1}{e^{2x} + 4e^x + 3e^{\alpha x}}\, dx = \int_0^1 \frac{(e^x - \cos x)^\alpha + e^x - 1}{e^{2x} + 4e^x + 3e^{\alpha x}}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{(e^x - \cos x)^\alpha + e^x - 1}{e^{2x} + 4e^x + 3e^{\alpha x}}\, dx$$

Partiamo dal primo e studiamo la funzione integranda in $x = 0$. Ricordiamo gli sviluppi di Taylor:

$$e^x = 1 + x + o(x), \quad \cos x = 1 + o(x)$$

La maggior parte delle volte basterà fermarsi al primo ordine, infatti la convergenza per ordini superiori è garantita dalla convergenza ad ordini inferiori.

L'unico termine della funzione integranda che ha effettivamente problemi in $x = 0$ è $(e^x - \cos x)^\alpha$, infatti dagli altri termini (sostituendo $x = 0$) provengono contributi finiti. Allora in $x = 0$:

$$\int_0^1 \frac{(e^x - \cos x)^\alpha + e^x - 1}{e^{2x} + 4e^x + 3e^{\alpha x}}\, dx \sim \int_0^1 (e^x - \cos x)^\alpha\, dx \sim \int_0^1 (1+x-1+o(x))^\alpha\, dx \sim \int_0^1 \frac{1}{x^{-\alpha}}\, dx$$

Questo converge se e solo se $-\alpha < 1 \iff \alpha > -1$

Passando al secondo integrale, a $+\infty$ la funzione coseno è trascurabile in quanto limitata e l'esponenziale e^x è trascurabile rispetto a e^{2x}, allora:

$$\int_1^{+\infty} \frac{(e^x - \cos x)^\alpha + e^x - 1}{e^{2x} + 4e^x + 3e^{\alpha x}}\, dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} + e^x}{e^{2x} + e^{\alpha x}}\, dx$$

Dobbiamo ora studiare i diversi casi:

- $\alpha \geq 2$: In questo caso il termine $e^{\alpha x}$ è dominante sia al numeratore che al denominatore, allora l'integrale è equivalente a

$$\sim \int_1^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^{\alpha x}}\, dx = \int_1^{+\infty} 1\, dx = +\infty$$

- $1 < \alpha < 2$: In questo caso al numeratore domina $e^{\alpha x}$ mentre al denominatore e^{2x}. L'integrale è equivalente a

$$\sim \int_1^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^{2x}}\, dx = \int_1^{+\infty} e^{(\alpha-2)x}\, dx$$

  che converge se e solo se $\alpha < 2$. Dunque vi è convergenza in questo caso.

- $\alpha \leq 1$: il caso è analogo al precedente e l'integrale converge.

Unendo i risultati, possiamo affermare che c'è convergenza quando $-1 < \alpha < 2$.

(b) Anche in questo caso la funzione integranda presenta un problema in $x = 0$ e a $+\infty$. Dividiamo come prima l'integrale in due parti:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha (2+x)^{\alpha+2}}\, dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha (2+x)^{\alpha+2}}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha (2+x)^{\alpha+2}}\, dx$$

Partiamo dal primo. In $x = 0$ per Taylor $\arctan x = x + o(x)$. Il termine $(2+x)^{\alpha+2}$ non presenta problematiche in $x = 0$, in quanto sempre finito (avrebbe problemi in $x = -2$, escluso dal dominio di integrazione). Allora per confronto asintotico:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha (2+x)^{\alpha+2}}\, dx \sim \int_0^1 \frac{x + o(x)}{x^\alpha}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}}\, dx$$

che converge se e solo se $\alpha - 1 < 1 \iff \alpha < 2$.

A $+\infty$ l'arcotangente tende a $\frac{\pi}{2}$, valore finito, dunque è trascurabile. Il 2 in $(2+x)$ è analogamente trascurabile per $x \to +\infty$. Allora:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha (2+x)^{\alpha+2}}\, dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha x^{\alpha+2}}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha+2}}\, dx$$

che converge quando $2\alpha + 2 > 1 \iff \alpha > -\frac{1}{2}$.

Unendo i risultati, l'integrale converge quando $-\frac{1}{2} < \alpha < 2$.