ESERCITAZIONE Il dominio della frequenza

Ex 1 Siano: $s(t) = \Lambda(t)$ e $x(t) = rep_2[s](t)$

1) Calcolare e Tracciare $S(\omega)$

2) Dimostrare che, se v ha supporto $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ ed è $\mathcal{L}^1(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, i coeff. di Fourier di $w = rep_T[v]$ sono $a_k = \frac{1}{T} V(k\omega_0)$ dove $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ e $V = \mathcal{F}[v]$

3) Applicare il risultato precedente al segnale x per trovare che i suoi cdF sono $a_k = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2(\frac{k}{2})$

4) Ricordando che $\mathcal{F}(e^{j\omega_0 t})(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$, calcolare la TF di x a partire dalla sua SdF

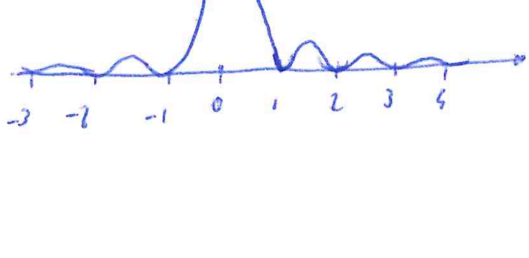
5) Quale potrebbe essere la R.F. di un filtro L tale che $L[x](t)$ è una sinusoide a frequenza 5.5 Hz ?

---

1) Siccome $s(t) = u * u(t)$, $S(\omega) = \left[\mathcal{F}(u(t))(\omega)\right]^2 = \operatorname{sinc}^2(\frac{\omega}{2\pi})$

Il sinc^2 è sempre ≥ 0 e si annulla quando l'argomento è $\mathbb{Z}_0$

Il decadimento asintotico è del tipo ω^{-2}



2) Nelle ipotesi fatte, w soddisfa Dirichlet; i suoi coeff. sono:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} w(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \overset{(a)}{=} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \overset{(b)}{=}$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, e^{-j(k\omega_0)t}\, dt \overset{(c)}{=} \frac{1}{T} V(\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0} \qquad \text{CVD}$$

(a) : $\forall t \in (-T/2, T/2)$, $w(t) = v(t)$

(b) $\forall t \notin (-T/2, T/2)$, $v(t) = 0$

(c) Formula di analisi TF per $\omega = k\omega_0$

3) In questo caso, i cdF di x sono dunque

$$a_k = \frac{1}{T} S(k\omega_0) \qquad \text{con} \quad T = 2, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi, \quad S(\omega) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

quindi
$$a_k = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k\pi}{2\pi}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \text{ pari} \neq 0 \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{(\sin\frac{k\pi}{2})^2}{(k\pi/2)^2} = \frac{2}{(k\pi)^2} & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

4) $x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$ quindi $X(\omega) = 2\pi \sum_k a_k\, \delta(\omega - k\omega_0)$

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{4}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}\,\delta[\omega - (2m+1)\pi]$$

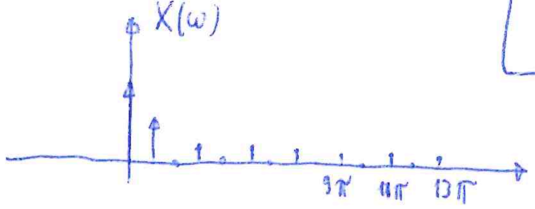
5) La frequenza di 5.5 Hz corrisponde ad una pulsazione di

$\omega_1 = 11\pi$ L'indice di armonica è $\frac{\omega_1}{\omega_0} = 11$

Bisogna allora utilizzare un filtro che annulli tutte le armoniche tranne l'undicesima.

$H(\pm 11\pi) = 1$, $H(k\pi) = 0 \quad \forall k \neq \pm 11$

Siccome $X(10\pi) = 0$ e $X(12\pi) = 0$



il filtro potrebbe avere una banda passante massima di 4π, centrato in $\omega_1 = 11\pi$

$$H(\omega) = rect\left(\frac{|\omega| - \omega_1}{4\pi}\right) \quad \text{oppure} \quad rect\left(\frac{\omega - |\omega_1|}{2\pi}\right)$$

Notiamo che $H(\omega) = \frac{1}{2} H_0(\omega - \omega_1) + \frac{1}{2} H_0(\omega + \omega_1)$

dove $H_0(\omega) = rect\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \Rightarrow h_0(t) = sinc(t)$

e quindi $h(t) = \cos(\omega_1 t) \cdot sinc(t)$

Ex 2 (esame gennaio 2024)

Sia $x(t) = sinc^2(t/T) + \cos\left(\frac{3\pi}{T} t\right)$

1) Calcolare e Tracciare $X(\omega)$ usando $\omega_0 = \frac{\pi}{T}$

2) Calcolare e Tracciare $Y(\omega)$, con $y(t) = x(t) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right)$

3) Determinare le minime frequenze di campionamento che soddisfano Nyquist per x e y

4) Sia $h(t) = \frac{3}{2T} sinc\left(\frac{3}{2T} t\right)$. Calcolare $z(t) = h * y(t)$

<u>Svolgimento</u>

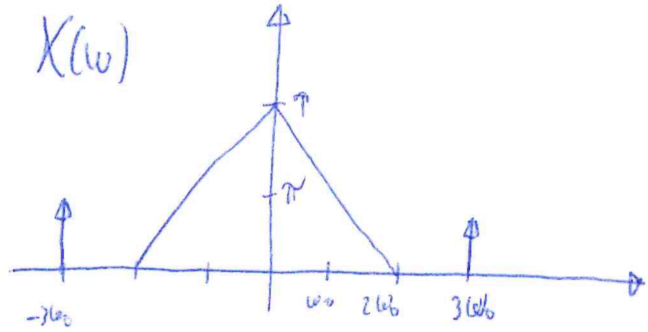
1) siccome $\mathcal{F}(sinc^2(t), t \to \omega) = \Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$, allora

$$\mathcal{F}\left(sinc^2\left(\frac{t}{T}\right), t \to \omega\right) = T \Lambda\left(\frac{T}{2\pi}\omega\right) \qquad \text{(regola camb. scala)}$$

$$X(\omega) = \mathcal{F}\left(sinc^2\left(\frac{t}{T}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{T}t\right), t \to \omega\right) = T\Lambda\left(\frac{T}{2\pi}\omega\right) + \pi\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{T}\right) + \pi\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{T}\right) =$$

$$= T\Lambda\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) + \pi\delta(\omega - 3\omega_0) + \pi\delta(\omega + 3\omega_0)$$

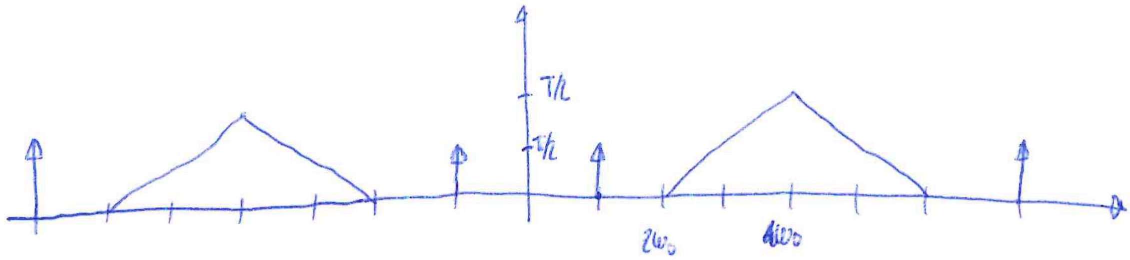
Eccone l'andamento:



2) Basta applicare la regola della modulazione:

$$y(t) = x(t)\cos(4\omega_0 t) \Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2}\left[X(\omega-4\omega_0) + X(\omega+4\omega_0)\right]$$

$$Y(\omega) = \frac{T}{2}\Lambda\left(\frac{\omega-4\omega_0}{2\omega_0}\right) + \frac{T}{2}\Lambda\left(\frac{\omega+4\omega_0}{2\omega_0}\right) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega-7\omega_0) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega-\omega_0) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega+\omega_0) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega+3\omega_0)$$



3) La massima pulsazione di x è $3\omega_0 = \frac{3\pi}{T}$

Il massimo periodo di campionamento è $T_{min} = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{T}} = \frac{T}{3}$

La minima freq. di camp. è $f_{min} = 3/T$

Per y si ha invece: $\omega_{MAX} = 7\omega_0$ $\quad T_{max} = \frac{\pi}{\frac{7\pi}{T}} = \frac{T}{7}$ $\quad f_{min} = \frac{7}{T}$

4) Conviene lavorare in frequenza.

$$H(\omega) = \frac{2T}{3}\cdot\frac{3}{2T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{2T}{3}\frac{\omega}{2\pi}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{3\pi/T}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{3\omega_0}\right)$$

Allora $Z(\omega) = H(\omega)\cdot Y(\omega) = \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]$

$$z(t) = \frac{1}{2}\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

Ex 3 Il segnale $x(t) = 5\cos(\omega_1 t + \frac{\pi}{6}) + 2\cos(\omega_2 t + \frac{\pi}{5})$

con $\omega_1, \omega_2 \in (0, 6\pi)$, è filtrato con un LTI avente RF

$H(\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{8\pi}\right)$. Sia y l'uscita corrispondente.

Qual è la minima freq. di campionamento di y affinché sia possibile ricostruire tale segnale dai suoi campioni

Svolgimento. H è un LPF ideale con $\omega_{MAX} = 4\pi$

A seconda dei valori di ω_1 e ω_2, il segnale y può essere costituito da 0, 1 o 2 sinusoidi. In ogni caso, non avrà contenuto in frequenza superiore a ω_{MAX}. Allora basterà porre

$$f_{min} \geq 2 \cdot \frac{\omega_{MAX}}{2\pi} = 2 \cdot \frac{4\pi}{2\pi} = 4$$

Volendo, una condizione più stretta è:

$$\omega_M = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega_1 > \omega_{MAX} \text{ e } \omega_2 > \omega_{MAX} \\ \omega_1 & \text{se } \omega_1 < \omega_{MAX} < \omega_2 \text{ o } \omega_2 < \omega_1 < \omega_{MAX} \\ \omega_2 & \text{se } \omega_2 < \omega_{MAX} < \omega_1 \text{ o } \omega_1 < \omega_2 < \omega_{MAX} \end{cases}$$

e $f_c \geq 2\,\frac{\omega_M}{2\pi}$

Ex 4 Trovare la minima freq. di campionamento per

$X(\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega - \omega_0}{4\pi D}\right) e^{j t_0 \omega}$. Particolarizzare per $\omega_0 = \frac{2}{5}\pi$, $D = 2$

Svolgimento Il supporto di X è $(\omega_0 - 2\pi D, \omega_0 + 2\pi D)$

Quindi $\omega_M = \omega_0 + 2\pi D \Rightarrow T_{max} = \frac{\pi}{\omega_M} = \frac{\pi}{\omega_0 + 2\pi D} \Rightarrow f_{MIN} = \frac{\omega_0}{\pi} + 2D$

Particolarizzazione: $f_{MIN} = \frac{2}{5} + 4 = 4{,}4$