Esercizio 2

ESERCIZIO 2: Stima della frequenza di un segnale esponenziale immaginario puro

Supponiamo di poter acquisire $\boldsymbol{N}$ **campioni** di un segnale esponenziale immaginario puro: $s(n) = e^{j\omega_1 n}$

Dopo considereremo il caso più realistico di $s(n) = \cos \omega_1 n$, perché usando l'esponenziale si semplificano alcune parti del problema, senza modificarne gli elementi principali

L'obiettivo di questo esercizio è quello di **stimare il valore di $\boldsymbol{\omega_1}$** usando la **TFtd**

È fondamentale notare che non possiamo calcolare direttamente la TFtd di $s(n)$ perché non abbiamo a disposizione tutti i campioni, ma soltanto un numero finito N. Questo è equivalente a moltiplicare il segnale $s(n)$ per la funzione indicatrice di $\{0,1,\dots,N-1\}$.

Sia allora $x(n) = w(n)s(n)$, dove $w(n) = \begin{cases} 1 \text{ se } 0 \leq n < N \\ 0 \quad\quad \text{altrimenti} \end{cases}$

Il nome w richiama il termine *window*, cioè la finestra di osservazione del segnale.

Considereremo il problema di stimare ω_1 a partire dal segnale $x(n)$. I campioni di x sono memorizzati nella variabile `xCamp` contenuta nel file `lab3_ex2.mat`

Esercizio 2

Domande:

2.1 Calcolare (carta e penna!) la TFtd di x in funzione della TFtd di w e mostrare che $X(\omega) = W(\omega - \omega_1)$

2.2 Posto $y_K(n) = \begin{cases} \frac{1}{2K+1} & \text{se } |n| \leq K \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, abbiamo visto in classe che $Y_K(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{2K+1}{2}\omega\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}$. Sia ora **$N$ dispari.**

Sfruttare tale risultato per mostrare (carta e penna!) che $|W(\omega)| = N \frac{\left|\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)\right|}{\left|\sin\frac{\omega}{2}\right|}$ (1) .

A tal fine si mostri che $w(n) = N \cdot y_{\frac{N-1}{2}}\left(n - \frac{N-1}{2}\right)$

NB. Si può dimostrare che $|W(\omega)| = N \frac{\left|\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)\right|}{\left|\sin\frac{\omega}{2}\right|}$ anche se N è pari (senza dim.)

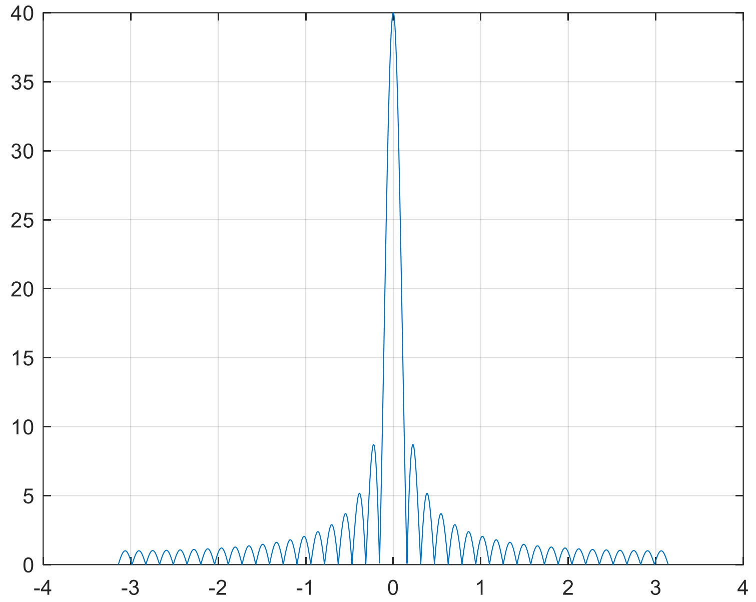
2.3 Tracciare $|W(\omega)|$ in Matlab, usando la formula (1), scegliendo un valore arbitrario per N.
Qual è l'ampiezza del lobo principale (in funzione di N)? Volendo stimare ω_1 come punto massimale per $|X(\omega)|$ come tale stima è influenzata dai parametri N ed M?

2.4 Nel file `lab5_ex2.mat` i campioni di x sono memorizzati nella variabile `xCamp`. Inoltre il file contiene `N` e `omega1`
Caricare i dati dal file valutare $|X(\omega)|$ tramite FFT con opportuno zero padding. Stimare ω_1 come la pulsazione corrispondente al valore massimo di $|X(\omega)|$.
Come garantire che la stima di ω_1 abbia un errore non superiore ad un certo $\Delta\omega$?

Esercizio 2 – Soluzione

2.3 Tracciare $|W(\omega)|$ in Matlab. Qual è l'ampiezza del lobo principale (in funzione di N)? Volendo stimare ω_1 come punto massimale per $|X(\omega)|$ come tale stima è influenzata dai parametri N ed M?

```
% TFtd dell'esponenziale imm. puro finestrato
N=40; % Scegliamo dei valori per i parametri
omega = -pi:1e-3:pi;
W = N * sin(N/2 * omega)./sin(omega/2);
figure; plot(omega,abs(W)); grid;
```



L'ampiezza del lobo principale è la distanza tra i due zeri più piccoli in valore assoluto. Gli zeri di W sono dati da:

$$\frac{N}{2}\omega = k\pi, \text{per } k \neq 0 \iff \omega = k\frac{2\pi}{N} \Rightarrow \Delta = \frac{4\pi}{N}$$

È chiaro che, siccome $X(\omega) = W(\omega - \omega_1)$, il massimo di X corrisponde a ω_1.
A sua volta, tale massimo è all'interno del lobo principale. Se aumentiamo N il lobo principale diventa sempre più stretto. Tuttavia, in questo problema il numero di campioni N è assegnato e non possiamo aumentarlo. Stimando X con la FFT, quando aumentiamo lo zero-padding (M), campioniamo X con precisione crescente. L'errore compiuto sulla stima di ω_1 è strettamente inferiore al passo di campionamento della TFtd, cioè $\Delta\omega < \frac{2\pi}{M}$