



ESERCIZIO 2: Stima della frequenza di un segnale esponenziale immaginario puro

Supponiamo di poter acquisire N campioni di un segnale esponenziale immaginario puro: $s(n) = e^{j\omega_1 n}$

Dopo considereremo il caso più realistico di $s(n) = \cos \omega_1 n$, perché usando l'esponenziale si semplificano alcune parti del problema, senza modificarne gli elementi principali

L'obiettivo di questo esercizio è quello di **stimare il valore di ω_1** usando la **TFtd**

È fondamentale notare che non possiamo calcolare direttamente la TFtd di $s(n)$ perché non abbiamo a disposizione tutti i campioni, ma soltanto un numero finito N . Questo è equivalente a moltiplicare il segnale $s(n)$ per la funzione indicatrice di $\{0, 1, \dots, N - 1\}$.

Sia allora $x(n) = w(n)s(n)$, dove $w(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq n < N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Il nome w richiama il termine *window*, cioè la finestra di osservazione del segnale.

Considereremo il problema di stimare ω_1 a partire dal segnale $x(n)$. I campioni di x sono memorizzati nella variabile `xCamp` contenuta nel file `1ab3_ex2.mat`



Domande:

2.1 Calcolare (carta e penna!) la TFFtd di x in funzione della TFFtd di w e mostrare che $X(\omega) = W(\omega - \omega_1)$

2.2 Posto $y_K(n) = \begin{cases} \frac{1}{2K+1} & \text{se } |n| \leq K \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, abbiamo visto in classe che $Y_K(\omega) = \frac{\sin(\frac{2K+1}{2}\omega)}{\sin\frac{\omega}{2}}$. Sia ora **N dispari**.

Sfruttare tale risultato per mostrare (carta e penna!) che $|W(\omega)| = N \frac{|\sin(\frac{N}{2}\omega)|}{|\sin\frac{\omega}{2}|}$ (1).

A tal fine si mostri che $w(n) = N \cdot y_{\frac{N-1}{2}}\left(n - \frac{N-1}{2}\right)$

NB. Si può dimostrare che $|W(\omega)| = N \frac{|\sin(\frac{N}{2}\omega)|}{|\sin\frac{\omega}{2}|}$ anche se N è pari (senza dim.)

2.3 Tracciare $|W(\omega)|$ in Matlab, usando la formula (1), scegliendo un valore arbitrario per N .

Qual è l'ampiezza del lobo principale (in funzione di N)? Volendo stimare ω_1 come punto massimale per $|X(\omega)|$ come tale stima è influenzata dai parametri N ed M ?

2.4 Nel file `1ab5_ex2.mat` i campioni di x sono memorizzati nella variabile `xCamp`. Inoltre il file contiene `N` e `omega1`. Caricare i dati dal file valutare $|X(\omega)|$ tramite FFT con opportuno zero padding. Stimare ω_1 come la pulsazione corrispondente al valore massimo di $|X(\omega)|$.

Come garantire che la stima di ω_1 abbia un errore non superiore ad un certo $\Delta\omega$?

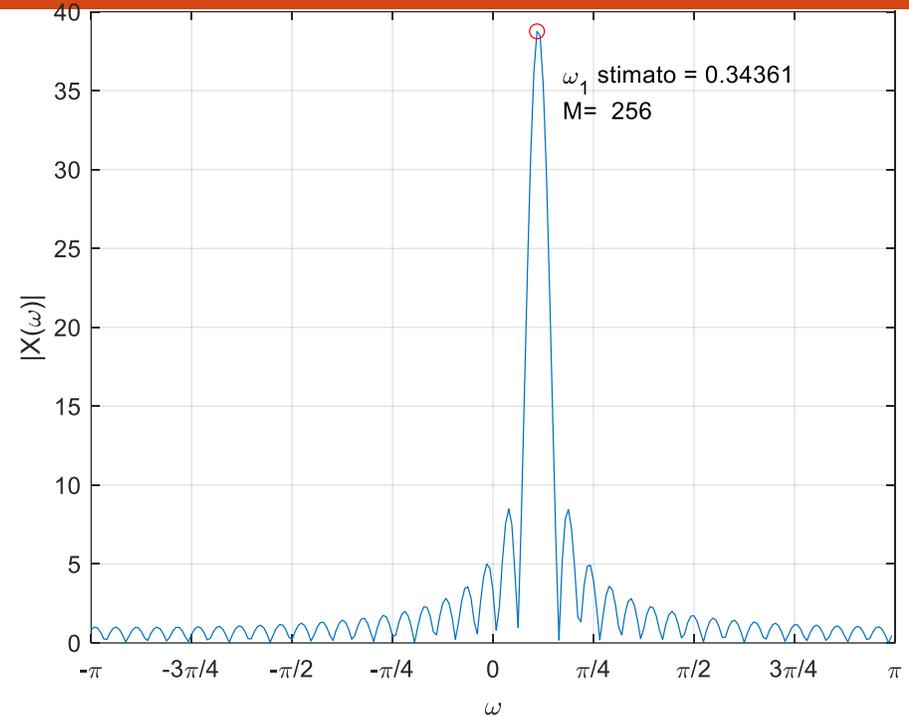


Esercizio 2 – Soluzione

Soluzione 2.4. Ecco il codice per stimare ω_1 :

```
%% stima pulsazione
clear variables
load lab3_ex2

% Zero padding
M=2^8;
% Asse delle pulsazioni campionato a 2pi/M e centrato in zero:
step = 2*pi/M;
omegaFFT = -pi: step: (pi - step);
% Modulo della DTFT campionata e centrata sulla pulsazione zero
X_FFT = fftshift(abs(fft(xCamp,M))) ;
figure; plot(omegaFFT,X_FFT); grid;
% Trovare il max di |X|
[XM, k] = max(X_FFT); % k è l'indice del valore max
omega1_stimato = omegaFFT(k)
```



Se aumentiamo N andiamo a cambiare la forma di $X(\omega)$ perché restringiamo il lobo principale, ed eventualmente miglioriamo la precision della stima se il nuovo valore di N è superiore al valore precedente di M . Spesso però non è possibile cambiare N . In tal caso possiamo migliorare la precisione della stima aumentando M , perché riduciamo il passo di campionamento di $X(\omega)$.

Provare a tracciare l'andamento dell'errore di stima in funzione di $\log_2 M$



Ecco il codice per valutare l'errore di stima in funzione di $\log_2 M$:

```
%%  
log2M = 6:20; index = 0;  
errore = zeros(size(log2M));  
for expVal = log2M,  
    index =index+1;  
    M=2^expVal;  
    step = 2*pi/M;  
    omegaFFT = -pi: step: (pi - step);  
    X_FFT = fftshift(abs(fft(xCamp,M))) ;  
    [XM, k] = max(X_FFT); % k è l'indice del valore max  
    omega1_stimato = omegaFFT(k);  
    errore(index) = abs(omega1_stimato-omega1);  
    deltaOmega(index) = 2*pi/M;  
end  
figure;  
semilogy(log2M,errore,log2M,deltaOmega);  
legend('Errore assoluto','Risoluzione in frequenza' )
```

