Esercizio 3

ESERCIZIO 3: Stima della frequenza di un segnale sinusoidale

Questa volta consideriamo un segnale **sinusoidale**, $s(t) = \cos \omega_1 t$, i cui campioni sono nel file `lab3_ex3.mat`
Sia allora $x(n) = w(n) \cos \omega_1 \, n$

3.1 Determinare un'espressione di $X(\omega)$ in funzione di $W(\omega)$ ed un'approssimazione di $|X(\omega)|$ per $\omega > 0$ che permetta di individuare ω_1 come punto massimale di $|X(\omega)|$

3.2 Scelto lo zero-padding M, calcolare tramite FFT $X(\omega)$ e tracciarne il modulo per $\omega \in \left(-\pi, \pi \frac{M-2}{M}\right)$

3.3 Stimare ω_1 come punto massimale di $|X(\omega)|$, come nel caso precedente

3.4 In questo caso però, i lobi secondari di $W(\omega + \omega_1)$ interferiscono con la posizione del picco di X. Infatti, la stima di ω_1 risulta meno accurata rispetto al caso precendete, indipendentemente dal valore scelto per M.
Un modo per risolvere il problema consiste nel *cambiare la forma della finestra* $w(n)$. Invece di prendere una finestra rettangolare, possiamo prendere una finestra la cui trasformata $\widehat{W}(\omega)$ abbia un **decadimento più rapido**. Si usi la cosiddetta *finestra di Hamming*:

$$\widehat{w}(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

Tracciare $\widehat{w}(n)$, $\left|\widehat{W}(\omega)\right|$. Infine usare la nuova finestra per stimare ω_1 come valore massimale di $\left|\hat{X}(\omega)\right|$, dove $\hat{x}(n) = \widehat{w}(n) s(n)$

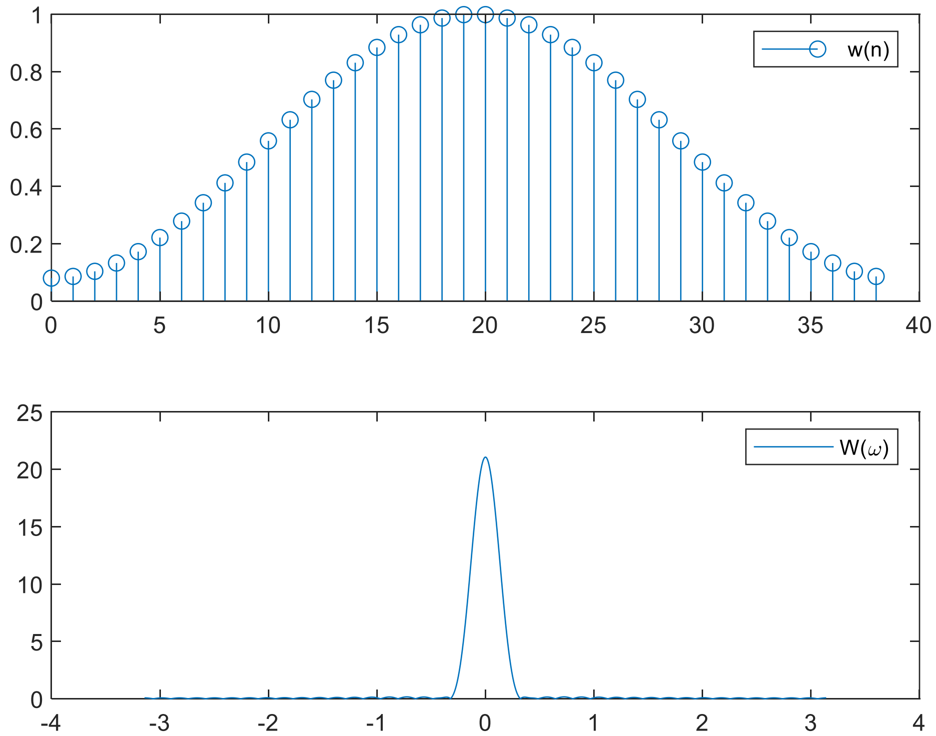
Esercizio 3 – Soluzione

ESERCIZIO 3: Stima della frequenza di un segnale sinusoidale

3.4 Data la *finestra di Hamming*: $\hat{w}(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$

Tracciare $\hat{w}(n)$, $|\widehat{W}(\omega)|$.

```
%% Hamming
N=numel(xCamp);
n = 0:N-1; M=2^12;
wHamming = 0.54- 0.46*cos(2*pi*n/N);
figure;
subplot(211); stem(n,wHamming); legend('w(n)')
W = fft(wHamming, M);
step = 2*pi/M;
omegaFFT = -pi: step: (pi - step);
subplot(212), plot(omegaFFT, fftshift(abs(W)));
legend('W(\omega)')
```

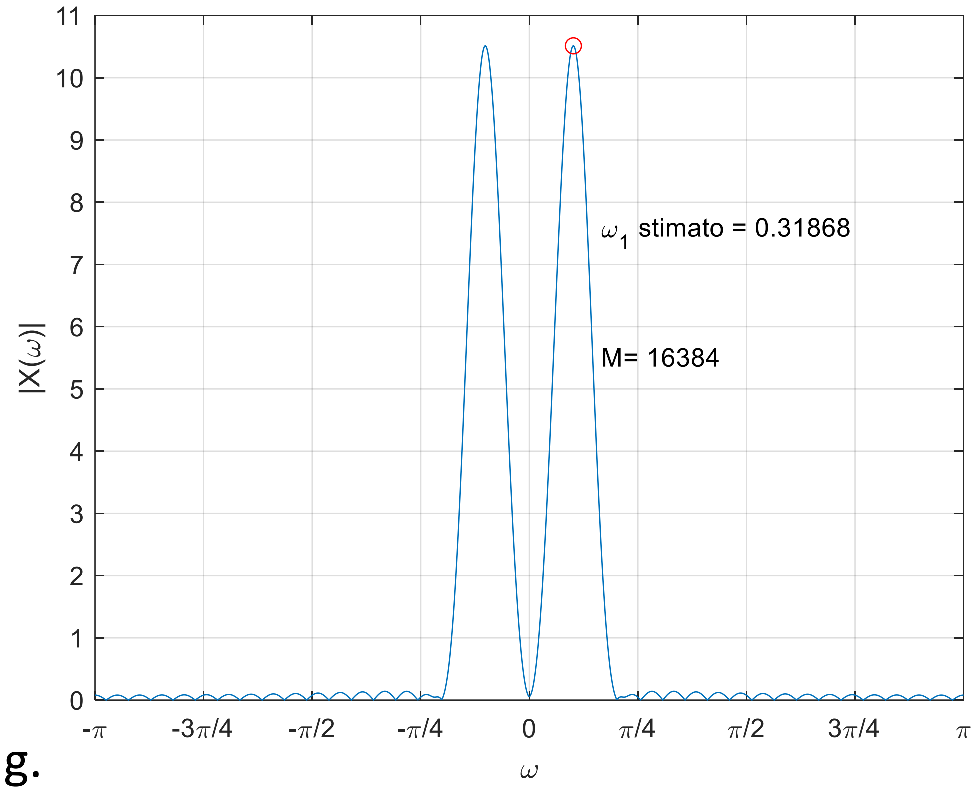


Si osserva che il lobo principale di $\widehat{W}$ è più largo rispetto al caso di finestra rettangolare, ma i lobi secondari sono molto più attenuati

Esercizio 3 – Soluzione

Usare la nuova finestra per modulare i campioni e stimare la pulsazione

```
% Zero padding
load lab3_ex3

M=2^14;
wHamming = 0.54- 0.46*cos(2*pi*n/N);
step = 2*pi/M; omegaFFT = -pi: step: (pi - step);
X_FFT = fftshift(abs(fft(xCamp.*wHamming,M))) ;

figure; plot(omegaFFT,X_FFT);
xlabel('\omega'); ylabel('|X(\omega)|')
set(gca,'XTick', [-pi, -3*pi/4 -pi/2, -pi/4, 0, pi/4, pi/2, 3*pi/4, pi])
set(gca,'XTickLabel', {'-\pi', '-3\pi/4', '-\pi/2', '-\pi/4', '0',...
'\pi/4', '\pi/2', '3\pi/4' , '\pi'})
axis([-pi pi 0 11]); grid

% Trovare il max di |X|
[XM, k] = max(X_FFT); % k è l'indice del valore max
omega1_stimato = abs(omegaFFT(k));
```

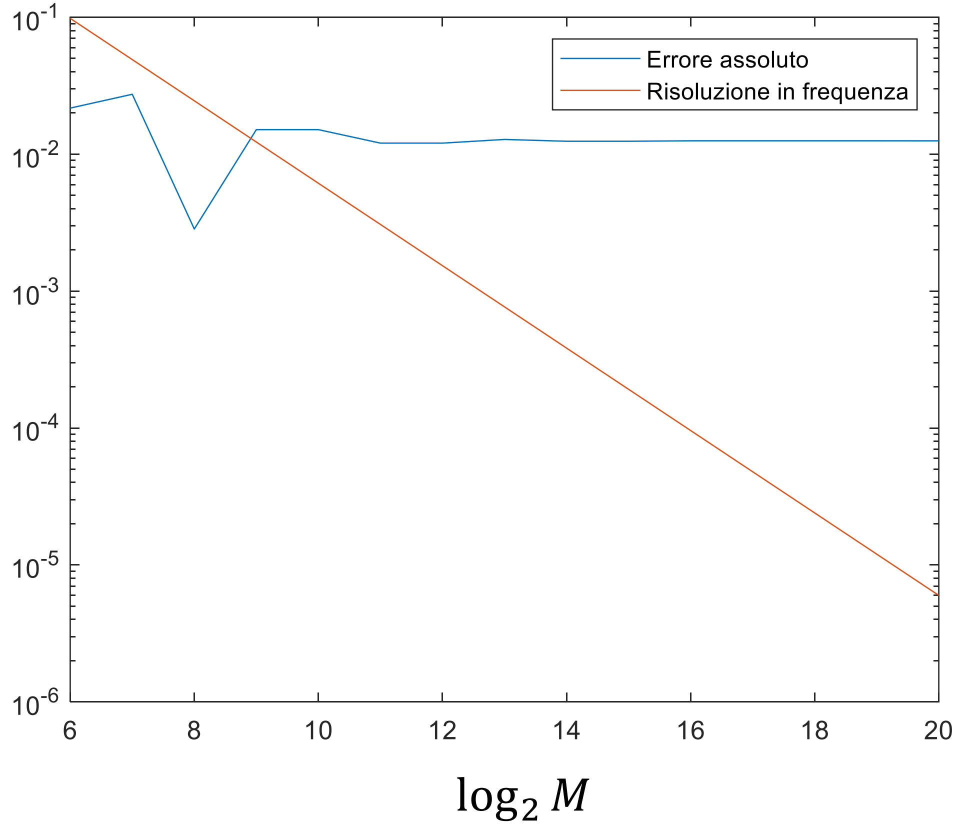


La nuova stima è migliore grazie all’usa della finestra di Hamming.

Esercizio 3 – Soluzione

Si noti che rispetto all'esercizio 2, se si mantiene la finestra rettangolare, questa volta aumentare il valore di M non basta a ridurre l'errore, per via dei lobi secondari. È quindi importante introdurre una finestra con un miglior *decadimento asintotico*.

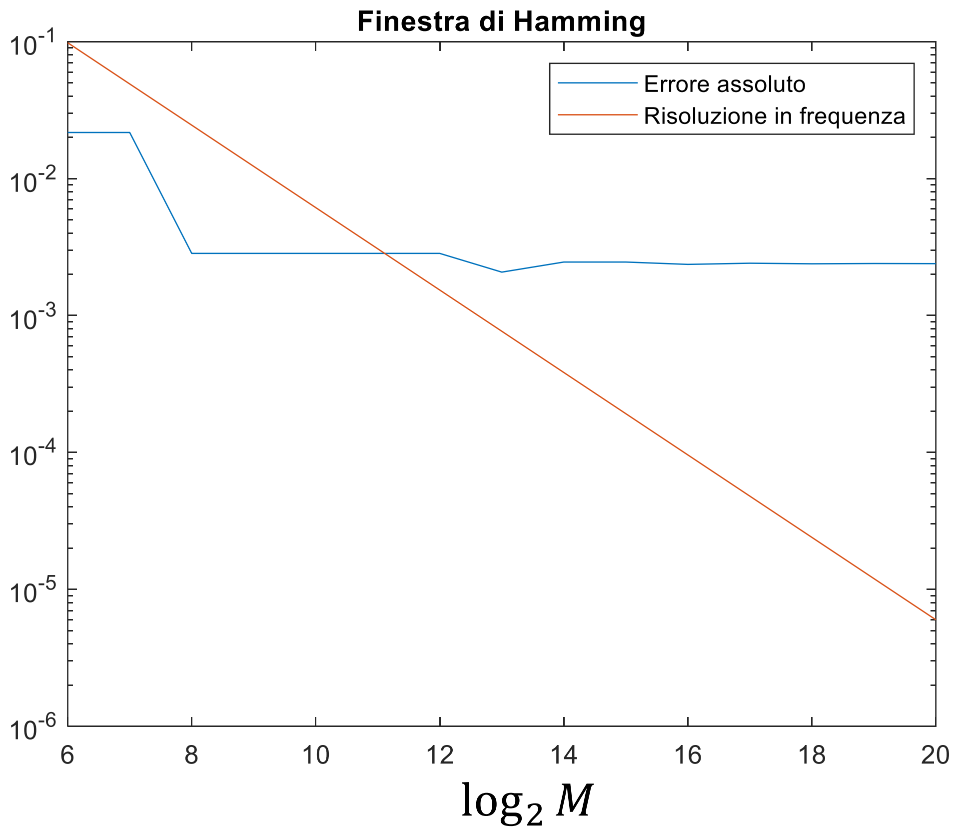
```
clear variables
load lab3_ex3


log2M = 6:20; index = 0;
errore = zeros(size(log2M));
for expVal = log2M,
          index =index+1;
          M=2^expVal;
          step = 2*pi/M;
          omegaFFT = -pi: step: (pi - step);
          X_FFT = fftshift(abs(fft(xCamp,M))) ;
          [XM, k] = max(X_FFT); % k è l'indice del valore max
          omega1_stimato = abs(omegaFFT(k));
          errore(index) = abs(omega1_stimato-omega1);
          deltaOmega(index) = 2*pi/M;
end
figure;
semilogy(log2M,errore,log2M,deltaOmega); grid;
title('Finestra rettangolare'); axis([6 20 1e-6 1e-1]);
legend('Errore assoluto','Risoluzione in frequenza' )
```



Esercizio 3 – Soluzione

Con la finestra di Hamming in questo esempio l'errore asintotico è circa 5 volte piu piccolo (miglioramento di 6 dB). L'errore non tende a zero perché comunque ci sono dei lobi secondari. Anche l'ampiezza del lobo principale può essere deleteria se la pulsazione da stimare è piccola

```
clear variables
load lab3_ex3
N=numel(xCamp);
n=0:N-1;
wHamming = 0.54- 0.46*cos(2*pi*n/N);
log2M = 6:20; index = 0;
errore = zeros(size(log2M));
for expVal = log2M,
          index =index+1;
          M=2^expVal;
          step = 2*pi/M;
          omegaFFT = -pi: step: (pi - step);
          X_FFT = fftshift(abs(fft(xCamp.* wHamming,M))) ;
          [XM, k] = max(X_FFT); % k è l'indice del valore max
          omega1_stimato = abs(omegaFFT(k));
          errore(index) = abs(omega1_stimato-omega1);
          deltaOmega(index) = 2*2*pi/M;
end
figure; semilogy(log2M,errore,log2M,deltaOmega); grid;
title('Finestra di Hamming'); axis([6 20 1e-6 1e-1]);
legend('Errore assoluto','Risoluzione in frequenza' )
```



Esercizio 3 – Soluzione

Per ridurre ulteriormente l'errore servirebbero più campioni del segnale s. In questo modo i lobi sono più stretti. Ecco l'andamento dell'errore con $N = 100$