



ESERCIZIO 2: Stima della frequenza di un segnale esponenziale immaginario puro

Supponiamo di poter acquisire N campioni di un segnale esponenziale immaginario puro: $s(n) = e^{j\omega_1 n}$

Dopo considereremo il caso più realistico di $s(n) = \cos \omega_1 n$, perché usando l'esponenziale si semplificano alcune parti del problema, senza modificarne gli elementi principali

L'obiettivo di questo esercizio è quello di **stimare il valore di ω_1** usando la **TFtd**

È fondamentale notare che non possiamo calcolare direttamente la TFtd di $s(n)$ perché non abbiamo a disposizione tutti i campioni, ma soltanto un numero finito N . Questo è equivalente a moltiplicare il segnale $s(n)$ per la funzione indicatrice di $\{0, 1, \dots, N - 1\}$.

Sia allora $x(n) = w(n)s(n)$, dove $w(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq n < N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Il nome w richiama il termine *window*, cioè la finestra di osservazione del segnale.

Considereremo il problema di stimare ω_1 a partire dal segnale $x(n)$. I campioni di x sono memorizzati nella variabile `xCamp` contenuta nel file `1ab3_ex2.mat`



Domande:

2.1 Calcolare (carta e penna!) la Tftd di x in funzione della Tftd di w e mostrare che $X(\omega) = W(\omega - \omega_1)$

2.2 Posto $y_K(n) = \begin{cases} \frac{1}{2K+1} & \text{se } |n| \leq K \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, abbiamo visto in classe che $Y_K(\omega) = \frac{\sin(\frac{2K+1}{2}\omega)}{\sin\frac{\omega}{2}}$. Sia ora **N dispari**.

Sfruttare tale risultato per mostrare (carta e penna!) che $|W(\omega)| = N \frac{|\sin(\frac{N}{2}\omega)|}{|\sin\frac{\omega}{2}|}$ (1).

A tal fine si mostri che $w(n) = N \cdot y_{\frac{N-1}{2}}\left(n - \frac{N-1}{2}\right)$

NB. Si può dimostrare che $|W(\omega)| = N \frac{|\sin(\frac{N}{2}\omega)|}{|\sin\frac{\omega}{2}|}$ anche se N è pari (senza dim.)

2.3 Tracciare $|W(\omega)|$ in Matlab, usando la formula (1), scegliendo un valore arbitrario per N .

Qual è l'ampiezza del lobo principale (in funzione di N)? Volendo stimare ω_1 come punto massimale per $|X(\omega)|$ come tale stima è influenzata dai parametri N ed M ?

2.4 Nel file `1ab5_ex2.mat` i campioni di x sono memorizzati nella variabile `xCamp`. Inoltre il file contiene `N` e `omega1`. Caricare i dati dal file valutare $|X(\omega)|$ tramite FFT con opportuno zero padding. Stimare ω_1 come la pulsazione corrispondente al valore massimo di $|X(\omega)|$.

Come garantire che la stima di ω_1 abbia un errore non superiore ad un certo $\Delta\omega$?



Domande:

2.1 Calcolare la Tftd di x in funzione della Tftd di w e mostrare che $X(\omega) = W(\omega - \omega_1)$

Usando la proprietà di modulazione, $x(n) = w(n)e^{j\omega_1 n} \Rightarrow X(\omega) = W(\omega - \omega_1)$

2.2 Mostrare che $|W(\omega)| = N \frac{|\sin(\frac{N}{2}\omega)|}{|\sin\frac{\omega}{2}|}$. A tal fine si mostri che $w(n) = N \cdot y_{\frac{N-1}{2}}\left(n - \frac{N-1}{2}\right)$

In effetti, $y_{\frac{N-1}{2}}(n)$ è non nullo sugli N campioni da $-\frac{N-1}{2}$ a $\frac{N-1}{2}$. Per cui, ritardando tale segnale di $\frac{N-1}{2}$ si ottiene un segnale non nullo tra 0 e $N - 1$. Moltiplicando per N si ottiene esattamente $w(n)$

Adesso che $w(n) = N y_{\frac{N-1}{2}}\left(n - \frac{N-1}{2}\right)$, si ha, dalla proprietà del ritardo:

$$W(\omega) = N Y_{\frac{N-1}{2}}(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

$$|W(\omega)| = N \left| Y_{\frac{N-1}{2}}(\omega) \right| = N \left| \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{\sin\frac{\omega}{2}} \right|$$