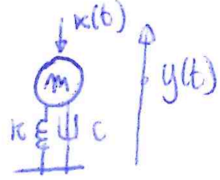
# Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti (EDOLCC)



Numerosi problemi fisici sono descritti da EDOLCC




<u>Esempio</u>: sistema massa-molla-smorzatore:

la posizione della massa rispetto al riposo è $y(t)$

la forza applicata è $x(t)$, e si ha $my'' + cy' + ky = x$

<u>Esempio</u> Circuito RLC

la corrente che attraversa il circuito è $y(t)$, la tensione applicata è $x(t)$; si ha $y'' + \frac{R}{L}y' + \frac{1}{LC}y = x'$

La forma più generale di un'EDOLCC è

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)} \quad (1)$$

In questa formulazione, $x$ è un segnale noto (a T.C.) o "ingresso" e $y$ è un segnale da determinare, o "uscita".

$x^{(k)}$ è la derivata $k$-esima di $x$

$y^{(k)}$ è la derivata $k$-esima di $y$

Possiamo sempre considerare $a_n$ e $b_m$ non nulli.
In altre parole, $n$ è il più grande valore di $k$ per cui $a_k \neq 0$
Similmente per $m$.
Siccome $a_n \neq 0$, possiamo dividere ambo i membri della (1) per $a_n$

ottenendo una nuova equazione in cui il coeff. di $y^{(n)}$ è uguale a 1.
Per semplicità quindi, d'ora in poi considereremo sempre $a_n = 1$

Si noti che i coefficienti $a_K$ e $b_K$ sono, $\forall K$, indipendenti dalla variabile da cui dipendono x e y. In questo si parla di "coefficienti costanti"

Risolvere l'EDOLCC significa trovare tutte le coppie di segnali x e y per le quali la (1) è vera per ogni $t \in \mathbb{R}$

Polinomi $a(s)$ e $b(s)$

È utile introdurre due polinomi di variabile complessa $s$:

$$a(s) = \sum_{K=0}^{n} a_K s^K \qquad e \qquad b(s) = \sum_{K=0}^{m} b_K s^K$$

Scrittura formale

Sia D l'operatore di derivata: $x' = D(x)$

Formalmente, scriveremo $D^K x$ per indicare la derivata $K^{ma}$ di x

Allora possiamo usare i polinomi $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ per scrivere l'EDOLCC:

$$a(D)(y) = \sum_{K=0}^{n} a_K D^K y = \sum_{K=0}^{n} a_K y^{(K)}$$

$$b(D)(x) = \sum_{K=0}^{m} b_K D^K x = \sum_{K=0}^{m} b_K x^{(K)}$$

La (1) si può riscrivere: $a(D)(y) = b(D)(y)$

Un'EDOLCC può ammettere, in generale, infinite uscite $y$ che la soddisfano insieme allo stesso ingresso $x$.

Quindi, senza altre condizioni, un'EDOLCC non è un sistema secondo la nostra definizione, perché ad uno stesso ingresso possono corrispondere più uscite.

Tuttavia, se si fissano opportuni vincoli, si ripristina la corrispondenza "uno-a-uno" tra ingresso e uscita

In particolare, vale il seguente Teorema

## Teorema di esistenza e unicità della soluzione di un'EDOLCC con condizioni iniziali

- Siano $a(s)$ e $b(s)$ due polinomi di grado $n$ e $m$ rispettivamente
- Sia $x$ un segnale per il quale è possibile esprimere $x^{(m)}$ (derivata $m$-esima) come una funzione o come una funzione generalizzata
- Sia $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$ un vettore di $n$ numeri reali: $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$

Si definisce allora "Problema di Cauchy" una EDOLCC con condizioni iniziali:

$$\boxed{\begin{cases} a(D)(y) = b(D)(x) & \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0^-) = y_0 \,, \quad y'(0^-) = y_1 \,, \ldots \quad y^{(n-1)}(0^-) = y_{n-1} \end{cases} \qquad (2)}$$

Il Teorema di esistenza e unicità afferma che la soluzione di tale P.d.C. esiste ed è unica [SENZA DIM.]

Nota 1 La scelta di porre le condizioni iniziali all'istante 0 è arbitraria e si potrebbe riformulare il Teorema con le condizioni: $y(t_0^-) = y_0$, $y'(t_0^-) = y_1$, ... $y^{(n-1)}(t_0^-) = y_{n-1}$ qualunque sia $t_0 \in \mathbb{R}$. La scelta $t_0 = 0$ semplifica la notazione

Nota 2 Le condizioni iniziali sono espresse come limiti sinistri della soluzione, in modo da includere soluzioni con discontinuità in zero.

Esempio Consideriamo l'EDOLCC $y' = x$

Posto $x = \delta$, è chiaro che, senza condizioni iniziali avremmo: $y(t) = u(t) + c$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

Scrivendo la condizione iniziale $y(0^-) = 0$ si ottiene $c = 0$ e $y(t) = u(t)$, senza doversi preoccupare della discontinuità in $t = 0$

Nota 3 Il PdC (2) definisce un sistema secondo la nostra definizione, perché ad ogni ingresso $x$ corrisponde una ed una sola uscita $y$

Nota 4 In generale, tale sistema non è lineare, in quanto ad un ingresso nullo può corrispondere un uscita non nulla.
In effetti questo dipende dalle condizioni iniziali: si può mostrare che un' EDOLCC con condizioni iniziali nulle (cioè $\underline{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$) definisce un sistema LTI

Tuttavia noi saremo interessati al caso più generale

Equazione omogenea associata

Data un' EDOLCC $a(D)(y) = b(D)(x)$, si definisce "omogenea associata" a tale equazione, una nuova EDOLCC:

$$a(D)(y) = 0$$

cioè l'omogenea associata (OA) di $a(D)(y) = b(D)(x)$ si ottiene imponendo $x = 0$

Risolvere l'O.A. è particolarmente importante perché vale il seguente Teorema

# Teorema sulla struttura delle soluzioni di un'EDOLCC

Sia $y_P$ una qualsiasi soluzione della (1)

1) Qualunque sia $y_0$ soluzione della O.A., $y = y_P + y_0$ è ancora soluzione della (1)

2) Qualunque sia $y$ soluzione della (1), $\exists\, y_0$ soluzione dell'OA tale che $y = y_P + y_0$

In altre parole, fissato $y_P$, l'insieme $y_P + y_0$ con $y_0$ soluzione dell'OA. descrive tutte e sole le soluzioni della (1)

DIM Cominciamo con il punto 1, cioè
$y_P$ è una soluzione della (1) e $y_0$ della O.A.,
allora anche $y_P + y_0$ è una soluzione della (1).

Basta osservare che la prima ipotesi significa $a(D)(y_P) = b(D)(x)$ mentre la seconda significa $a(D)(y_0) = 0$

Allora abbiamo:

$$a(D)(y) = a(D)(y_P + y_0) \overset{(a)}{=} a(D)(y_P) + a(D)(y_0) = b(D)(x) + 0 = b(D)(x)$$

CVD.

Il passaggio (a) è giustificato dalla linearità dell'operatore $D^k$

2) Ora $y$ è una soluzione della (1). Poniamo $y_0 = y - y_P$ e mostriamo che è una soluzione dell'O.A., cioè che $a(D)(y_0) = 0$.

$$a(D)(y_0) = a(D)(y - y_P) = a(D)(y) - a(D)(y_P) = b(D)(x) - b(D)(x) = 0 \qquad \text{CVD}$$

In conclusione l'insieme delle soluzioni della (1) non è uno spazio vettoriale (non è chiuso rispetto alla somma) ma è affine cioè generato da un vettore $y_P$ più il sottospazio $Y_0$ (vd. pag. 9)

# Problema di Cauchy causale (PCC)

Spesso è importante considerare una versione particolare del PdC (2), detto "Problema di Cauchy causale" (PCC).

Nel PCC si suppone che $x(t)=0$ $\forall t<0$ cioè il sistema "non è sollecitato" per $t<0$.

Nell'istante $t=0$ si assegnano le condizioni iniziali, dette anche stato del sistema.

Inoltre, a partire da $t=0$, il sistema può essere sollecitato, cioè il segnale $x$ è libero di assumere un andamento qualsiasi per $t\geq 0$ (purché $x$ e tutte le sue $m$ derivate siano esprimibili come segnali o come segnali generalizzati, cioè con delta o derivate della delta)

In tali condizioni, ci interessa l'andamento di $y$ solo soltanto per $t>0$

In altre parole: 1) conosciamo lo stato del sistema per $t\to 0^-$

2) conosciamo l'ingresso per $t\geq 0$

3) cerchiamo l'uscita per $t\geq 0$

questo tipo di problemi è molto comune in tanti ambiti della fisica e dell'ingegneria

Matematicamente, il PCC si scrive come segue:

$$\begin{cases} a(D)(y) = b(D)(x) \\ x(t) = 0 \quad \forall t<0 \\ y(0^-) = y_0; \quad y'(0^-) = y_1, \dots \quad y^{(n-1)}(0^-) = y_{n-1} \end{cases} \tag{3}$$

Vale allora il seguente teorema della risposta libera e risposta forzata

Il problema (3) ammette $\forall t>0$, una ed una sola soluzione $y(t)$, che si esprime come somma di due contributi:

$$\forall t>0, \qquad y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$

$y_\ell(t)$ è la "risposta libera" definita come unica soluzione del PDC seguente:

$$\begin{cases} a(D)(y_\ell) = 0 \\ y_\ell(0) = y_0 \quad y_\ell'(0) = y_1, \dots \quad y_\ell^{(n-1)}(0^-) = y_{n-1} \end{cases} \tag{4}$$

cioè $y_\ell$ è l'evoluzione libera (cioè, senza sollecitazione $x$) del sistema date le condizioni iniziali assegnate

$y_f(t)$ è la "risposta forzata" ed è esprimibile come

$$y_f = h_+ * x$$

dove, a sua volta, $h_+$ è la risposta del sistema ad ingresso impulsivo ma con stato iniziale "a riposo" cioè:

$$\begin{cases} a(D)\,h_+ = b(D)(\delta) \\ h_+(0^-) = 0, \quad h_+'(0^-) = 0, \dots \quad h_+^{(n-1)}(0^-) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

La risposta forzata è la risposta impulsiva del "sistema a riposo" (cioè con condizioni iniziali nulle) ed essendo una convoluzione può in effetti vedersi come uscita di un LTI causale (infatti $h_+(t)$ deve essere nulla per $t<0$, come vedremo più avanti)

Tale LTI è il cosiddetto LTI causale associato al PCC

Questo Teorema è senza dimostrazione

Struttura dello spazio $Y_0$ delle soluzioni dell'O.A.

Lo spazio $Y_0$ delle soluzioni di $a(D)(y)=0$ è uno spazio vettoriale di dimensione $n$.

Infatti, se $y_1$ e $y_2 \in Y_0$, allora $a(D)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha a(D)(y_1) + \beta a(D)(y_2) = 0$

$\Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \in Y_0$

La dimensionalità dello spazio deriva dal seguente Teorema:

Teorema: Base di $Y_0$

Data un'EDOLCC omogenea $a(D)(y)=0$, si considerino le radici del polinomio $a(s)$, detto polinomio caratteristico.

In particolare, sia $r$ il numero di radici distinte del polinomio, indicate quindi con $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$

Ovviamente, $r \leq n$ e, detto $n_i$ la molteplicità della radice $\lambda_i$, si ha che $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$

Allora, una base di $Y_0$ è formata dalle seguenti $n$ funzioni:

$$e^{\lambda_1 t}, \quad t e^{\lambda_1 t}, \quad \dots, \quad t^{n_1 - 1} \cdot e^{\lambda_1 t} \qquad (n_1 \text{ funzioni})$$

$$e^{\lambda_2 t}, \quad t e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad t^{n_2 - 1} e^{\lambda_2 t} \qquad (n_2 \text{ funzioni})$$

$$\vdots$$

$$e^{\lambda_r t}, \quad t e^{\lambda_r t}, \quad \dots, \quad t^{n_r - 1} e^{\lambda_r t} \qquad (n_r \text{ funzioni})$$

DIM. Limitiamoci a mostrare che $e^{\lambda_i t}$ è una soluzione dell'equazione $a(D)(y) = 0$

Infatti osserviamo che, posto $\tilde{y} = e^{\lambda t}$, $D^k(\tilde{y}) = \lambda^k e^{\lambda t} = \lambda^k \tilde{y}(t)$

Allora $a(D)(\tilde{y}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \tilde{y}^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \tilde{y}(t) = a(\lambda) \cdot \tilde{y}(t)$

Allora, se $\lambda$ è una radice di $a$, è ovvio che $a(D)(\tilde{y}) = 0$

Con qualche calcolo, si può mostrare che, se $\tilde{y}(t) = t e^{\lambda t}$, allora $a(D)(\tilde{y}) = e^{\lambda t} \cdot \frac{d}{d\lambda} a(\lambda) + y(t) \cdot a(\lambda)$

Se $n_i \geq 2$, allora $a(\lambda_i) = 0$ e $a'(\lambda_i) = 0 \Rightarrow a(D)(t e^{\lambda_i t}) = 0$

Conclusione: la generica soluzione dell'OA si scrive: $\boxed{\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{n_i} c_{i,k} t^k e^{\lambda_i t}}$
dove $c_{i,k}$ sono coeff. arbitrari

## Caso di EDOLCC a coefficienti reali

Nel caso generale, il Teorema sulla struttura di $Y_0$ dice che una base di tale spazio è $\{t^k e^{\lambda_i t}\}_{\substack{i=1,\dots n \\ k=0,\dots n_i-1}}$

Se il polinomio caratteristico ha coefficienti reali, si può ricavare un'altra base di $Y_0$

Infatti, se $a_k \in \mathbb{R}$ $\forall k \in \{0,\dots n\}$ allora le radici del polinomio caratteristico sono o reali o a coppie complesse coniugate.

In altre parole, qualunque sia la radice $\lambda_i$, ci sono due possibilità:
- o $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e in tal caso scriveremo $\lambda_i = \sigma_i \in \mathbb{R}$ (radici reali)
- oppure $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$, ma in tal caso anche $\overline{\lambda_i} = \sigma_i - j\omega_i$ è una radice con la stessa molteplicità $n_i$. Inoltre $\sigma_i, \omega_i \in \mathbb{R}$. (radici complesse coniugate).

Le radici reali del polinomio caratteristico danno luogo alle funzioni di base $t^k e^{\sigma_i t}$, per ogni $k$ tra zero e $n_i - 1$, dove $n_i$ è la molteplicità della radice $\lambda_i$

Le coppie di radici complesse coniugate danno luogo a

$$y(t) = t^k e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} \quad e \quad \hat{y}(t) = t^k e^{\sigma_i t} e^{-j\omega t}, \quad \forall k \in \{0,\dots n_i - 1\}$$

Ora, il sottospazio generato da $y$ e $\hat{y}$ è rappresentato dal generico elemento span$(y, \hat{y})$:

$$\alpha y(t) + \beta \hat{y}(t) = \alpha t^k e^{t(\sigma_i + j\omega_i)} + \beta t^k e^{t(\sigma_i - j\omega_i)}$$

$$\alpha t^k e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} + \beta t^k e^{\sigma_i t} e^{-j\omega_i t} =$$

$$= \alpha t^k e^{\sigma_i t}(\cos\omega_i t + j \sin\omega_i t) + \beta t^k e^{\sigma_i t}(\cos\omega_i t - j \sin\omega_i t)$$

$$= (\alpha + \beta) \cdot (t^k e^{\sigma_i t} \cos\omega_i t) + j(\alpha - \beta)(t^k e^{\sigma_i t} \sin\omega_i t)$$

che è il sottospazio generato da $\begin{cases} t^k e^{\sigma_i t} \cos\omega_i t \text{ e} \\ t^k e^{\sigma_i t} \sin\omega_i t \end{cases}$

In conclusione, per un EDOLCC a coeff. reali, lo spazio $Y_0$ delle soluzioni dell'omogenea associata è generato dalle funzioni:

$\{t^k e^{\sigma_i t}\}_{k=0,\dots,n_i-1}$ per ogni radice reale $\lambda_i = \sigma_i$ del polinomio caratteristico, di molt. $n_i$

e da:

$\{t^k e^{\sigma_i t} \cos\omega_i t, \; t^k e^{\sigma_i} \sin\omega_i t\}_{k=0,\dots,n_i-1}$

per ogni coppia di radici complesse coniugate $\sigma_i \pm j\omega_i$ con molteplicità $n_i$

## Soluzione di un'EDOLCC omogenea con condizioni iniziali



Il Teorema sulla base di $Y_0$ permette di affermare che quest'ultimo è uno spazio vettoriale di dim. $n$

Imponendo $n$ condizioni iniziali riusciamo dunque a individuare l'unica soluzione di un PdC omogeneo.

In particolare, questa tecnica può essere usata per determinare l'evoluzione libera di un problema di Cauchy Causale.

Esempi

1) Determinare lo spazio delle soluzioni di $y'' + 3y' + 2y = 0$

- Polinomio caratteristico: $a(s) = s^2 + 3s + 2$
- Radici e molteplicità: $\frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ → $-2$, $-1$

due radici reali con molt. 1

Base: $\varphi_1(t) = e^{-2t}$ $\quad \varphi_2(t) = e^{-t}$

La generica soluzione è:

$$y_0(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

2) Per la EDOLCC omogenea precedente, determinare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali:

$$y_e(0^-) = 1 \qquad y_e'(0^-) = -1$$

Siccome $y_e(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$, abbiamo:

$y_e(0^-) = c_1 + c_2 = 1$ e $y_e'(t) = -2c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-t}$

$y_e'(0^-) = -2c_1 - c_2 = -1$

$\Rightarrow$ $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $y_e(t) = e^{-t}$

3) $y'' - 6y' + 9y = 0$

$a(s) = s^2 - 6s + 9 = 0$ $\qquad \lambda_1 = 3$ con molteplicità 2

$\varphi_1(t) = e^{3t} \qquad \varphi_2(t) = t e^{3t}$

$y_0(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$

4) Nel problema precedente, imponiamo $y_e(0^-) = 0 \quad y_e'(0^-) = 1$

$y_e(0^-) = c_1 = 0$

$y_e'(t) = 3c_1 e^{3t} + 3c_2 t e^{3t} + c_2 e^{3t}$

$y'(0) = 3c_1 + c_2 = 1$

Quindi $c_1 = 0$ e $c_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_e(t) = t e^{3t}$

5) $y'' + 4y = 0$

$a(s) = s^2 + 4 \qquad \lambda_1 = j2 \qquad \lambda_2 = -j2$

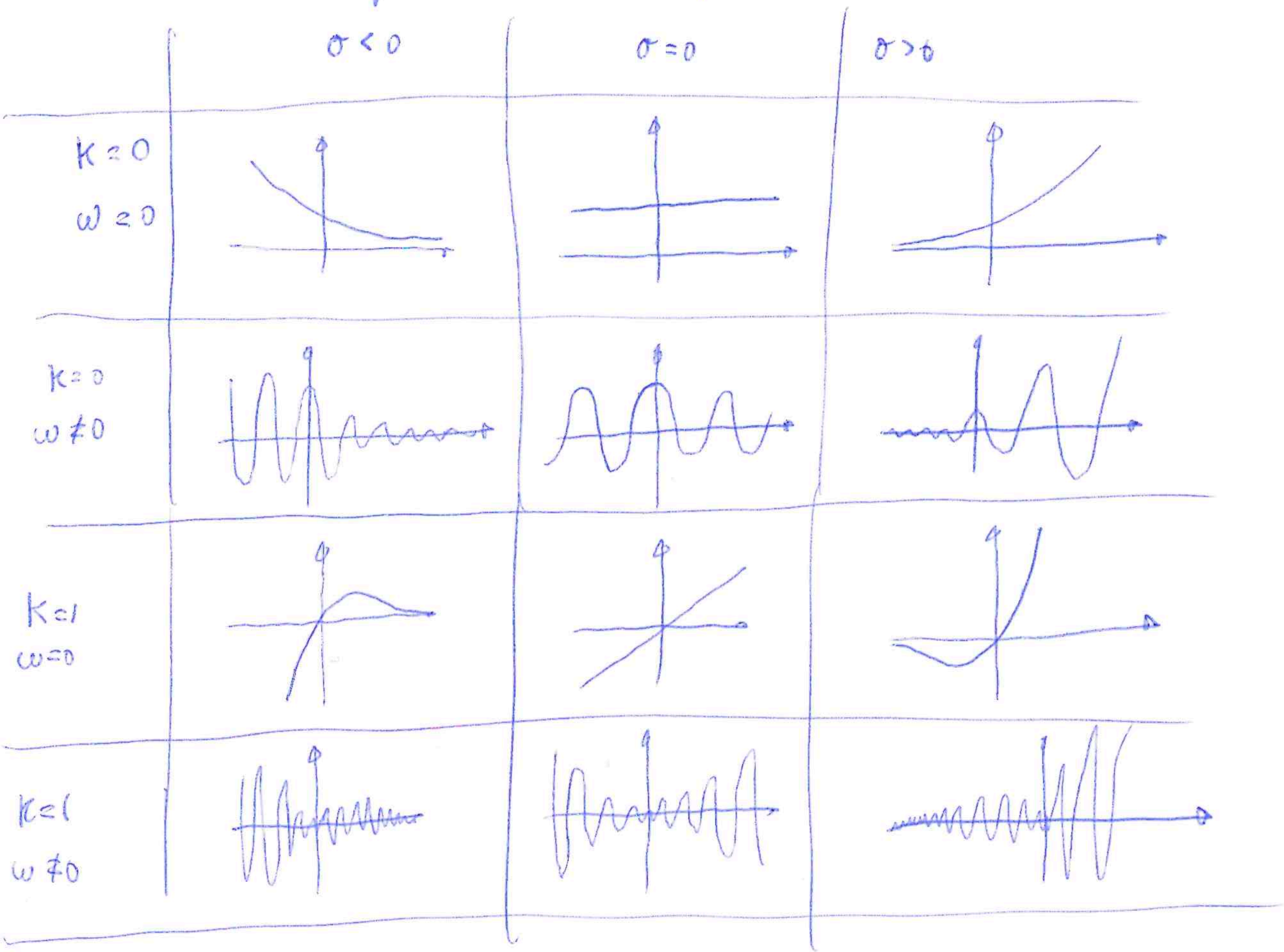
Base in forma complessa: $\varphi_1(t) = e^{j2t} \qquad \varphi_2(t) = e^{-j2t}$

Base in forma reale: $\varphi_1(t) = \cos 2t \qquad \varphi_2(t) = \sin 2t$

$y_0(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t = d_1 e^{j2t} + d_2 e^{-j2t}$

Le funzioni di base di una EDOLCC omogenea sono anche dette <u>modi</u>

Si tratta di funzioni del tipo $t^k e^{\sigma t} \cos(\omega t + \vartheta)$ $\quad \vartheta = 0$ o $\pi/2$




Consideriamo allora un problema di Cauchy causale.
L'evoluzione libera è una combinazione lineare dei modi. I modi da utilizzare sono determinati dalle radici del polinomio caratteristico e dalle loro molteplicità.
I coefficienti della combinazione lineare sono determinati imponendo le condizioni iniziali

# Determinazione della risposta forzata

Ricordiamo che $y_f = h_+ * x$ e che $h_+$ è l'unica soluzione del PdC. seguente:

$$\begin{cases} a(D)(h_+) = b(D)(\delta) \\ h_+(0^-) = h_+'(0^-) = \dots h_+^{(n-1)}(0^-) = 0 \end{cases} \qquad (S)$$

Determineremo $h_+$ per costruzione con la Tecnica detta "bilanciamento degli impulsi".

Sia $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ una base di $Y_0$, spazio delle soluzioni dell'omogenea associata.

Poniamo $\quad h_+(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)\right) \cdot u(t)$

Tale funzione, con opportuna scelta dei coefficienti $c_k$, risolve il nostro PdC (S).

Infatti, $\forall t<0$, $h_+(t) = 0$ e $\delta(t) = 0$

quindi $a(D)(h_+) = b(D)(\delta)$ per $t<0$

Inoltre, $\lim_{t \to 0^-} h_+^{(k)}(t) = 0 \quad \forall k$, quindi le condizioni iniziali sono soddisfatte.

Invece, per $t>0$ $\quad h_+(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)$

Quindi, per $t>0$ $h_+$ coincide con $\quad y_0(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t) \in Y_0$

e quindi $\quad \forall t>0 \quad a(D)(h^+) = a(D)(y_0) = 0$

ma anche $b(D)(\delta)(t) = 0 \quad \forall t>0$

Rimane quindi da stabilire il comportamento in zero.

Osserviamo che $b(D)(\delta)$ è una combinazione lineare di derivate di $\delta$ dall'ordine 0 all'ordine $m$.

Invece,

$$D(h_+) = D\big(y_0(t)\cdot u(t)\big) = y_0'(t)\cdot u(t) + y_0(t)\,\delta(t) =$$

$$= y_0'(t)\,u(t) + y_0(0)\,\delta(t)$$

$$D^2(h_+) = D\big(y_0'(t)\cdot u(t)\big) + y_0(0)\,\delta'(t)$$

$$= y_0''(t)\cdot u(t) + y_0'(0)\,\delta(t) + y_0(0)\,\delta'(t)$$

$$D^{(n)}(h_+) = y_0^{(n)}(t)\cdot u(t) + \sum_{l=0}^{n-1} y_0^{(l-1)}(0)\,\delta^{(l)}$$

Quindi $a(D)(h_+)$ è una combinazione lineare di $\delta^{(l)}$ con $l$ da 0 a $n-1$, più un segnale $y_1(t)\cdot u(t)$ dove a sua volta $y_1(t)$ è una combinazione lineare di derivate di $y_0(t)$

I valori dei coefficienti si trovano "bilanciando gli impulsi", cioè facendo in modo che $a(D)(h_+)$ e $b(D)(\delta)$ abbiano gli stessi impulsi con gli stessi coefficienti

In particolare avremo le condizioni

- $y_\ell(t) = 0$ : si può mostrare che è sempre automaticamente vera
- Gli $n$ coefficienti di $\delta, \delta', \dots \delta^{(n-1)}$ devono essere uguali in $a(D)(h_+)$ e $b(D)(\delta)$

$\to$ $n$ equazioni in $n$ incognite $(c_1, \dots c_n)$

Questo però è possibile se e solo se $m < n$

In questo caso infatti $b(D)(\delta) = b_0\delta + b_1\delta' + \dots + b_m\delta^{(m)} + 0\delta^{(m-1)} + \dots 0\delta^{(n)}$

e possiamo imporre che i coefficienti degli impulsi in $a(D)(h_+)$ sono uguali a $b_0, \dots b_m, 0, \dots 0$

Se invece $m \geq n$, in $a(D)(h_+)$ non possono comparire derivate degli impulsi di ordine adeguato

Allora in tal caso bisognerà cambiare la struttura di $h_+$

Se $m = n$ porremo:

$$h_+(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)\right) \cdot u(t) + d\,\delta(t)$$

dove $d$ è un ulteriore ($n+1$-esimo) grado di libertà della soluzione $h_+$

Osserviamo che $\forall t<0$ e $\forall t>0$, $h_+$ ha la stessa struttura di prima, quindi continua a soddisfare le EDOLCC.

Avere introdotto il termine $d \cdot \delta(t)$ permette anche di bilanciare gli impulsi. Infatti adesso $D^n(h_+)$ contiene un termine $d\,\delta^{(n)}(t) = d\,\delta^{(m)}(t)$ (siamo nel caso $n=m$)

e quindi possiamo bilanciare l'impulso di ordine $m$ contenuto in $b(D)(\delta)$.

Ci ritroviamo quindi con $n+1$ equazioni in $n+1$ incognite.

Similmente, per $m>n$, aggiungeremo a $h_+$ degli impulsi fino all'ordine $m-n$, in modo che $D^n(h_+)$ contenga degli impulsi di ordine fino a $m$, e sia possibile bilanciare gli $m+1$ impulsi $\delta, \delta^{(1)} \ldots \delta^{(m)}$ con $m+1$ equazioni in $m+1$ incognite ($c_1, \ldots c_n, q_0, q_1, \ldots q_{m-n}$)

# Sistema LTI causale associato ad una EDOLCC.

Data una EDOLCC $a(D)(y) = b(D)(x)$, siamo sempre in grado di determinare $h_+$, che infatti dipende unicamente dai polinomi $a(s)$ e $b(s)$

Possiamo sempre introdurre un LTI che ammetta $h_+$ come risposta impulsiva: chiamiamo $L$ tale sistema. Per costruzione, $L$ è causale. Viene chiamato sistema LTI causale associato all'EDOLCC.

Esso determina la risposta forzata di qualsiasi problema di Cauchy causale che ha la stessa EDOLCC, indipendentemente dalle condizioni iniziali che invece influenzano la risposta libera.

È interessante chiedersi quando $L$ è stabile BIBO.

Per rispondere a questa domanda, bisogna considerare separatamente i casi $m<n$, $m=n$ e $m>n$

$\boxed{\text{Se } m<n,}$ $\quad h_+(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t) \cdot u(t)$

Il sistema sarà stabile se e solo se $h_+ \in \mathcal{L}^1$

Si ha allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h_+(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\right| dt \leq \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} |\varphi_k(t)|\,dt$$

Allora se tutti i modi $\varphi_k$ sono assolutamente integrabili in $\mathbb{R}^+$, il sistema è stabile

Condizione sufficiente affinché ciò sia vero è che $\forall i \in \{1, .. r\}$, $\sigma_i = Re(\lambda_i) < 0$. Infatti in tal caso, i modi associati a $\lambda_i$ sono del tipo

$t^k \cdot e^{\sigma_i t} \cdot e^{j\omega_i t}$ il cui modulo è $|t|^k \cdot e^{\sigma_i t}$

che è assolutamente integrabile in $\mathbb{R}^+$ se $\sigma_i < 0$

Dimostreremo, con la trasformata di Laplace, che la condizione $Re(\lambda_i) < 0$ $\forall i \in \{1, .. r\}$ è anche necessaria (se a e b sono polinomi co-primi)

$\boxed{\text{Se } m = n}$ $\quad h_+(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)\right) \cdot u(t) + d\,\delta(t)$

$\forall x \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, $\quad h_+ * x = \left[\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)\right) u(t)\right] * x(t) + d \cdot x(t)$

La stabilità dipende allora solo da $\sum c_k \varphi_k(t) \cdot u(t)$ e quindi vale la stessa condizione sufficiente: $R(\lambda_i) < 0$

Anche in questo caso dimostreremo che la condizione è anche necessaria

Infine, se $m > n$, $h_+(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)\, u(t) + \sum_{l=0}^{m-n} q_l\, \delta^{(l)}(t)$

In tal caso il sistema <u>non è</u> stabile perché contiene un derivatore

In conclusione vale il seguente criterio di stabilità per il sistema LTI causale associato all'EDOLCC :

$\boxed{\text{se} \quad m > n}$ il sistema NON È stabile

$\boxed{\text{se} \quad n \geq m}$ il sistema è stabile se e solo se tutte le radici del polinomio caratteristico hanno parte reale negativa

Ricordiamo che abbiamo dimostrato solo la sufficienza della condizione $Re(\lambda_i) < 0$

<u>Esempi</u>

1) Data l'EDOLCC $y'' + y = x'$, calcolare $h_+$, cioè la R.I. dell'LTI causale associato

Per prima cosa dobbiamo determinare i <u>modi</u> dell'equazione, cioè la base di $Y_0$, spazio delle soluzioni dell'O.A.

Si parte dal polinomio caratteristico:

$$a(s) = s^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = j \, , \, \lambda_2 = -j \quad \Rightarrow \begin{cases} \sigma = 0 \\ \omega = 1 \end{cases}$$

$$\varphi_1(t) = e^{0t} \cos\omega t = \cos t$$
$$\varphi_2(t) = e^{0t} \operatorname{sen}\omega t = \sin t$$

La struttura di $h_+$, nel caso $n > m$ è:

$$h_+(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)\, u(t) = (c_1 \cos t + c_2 \sin t)\, u(t).$$

Per determinare $c_1$ e $c_2$ dobbiamo applicare il bilanciamento degli impulsi: $a(D)(h_+) = b(D)(\delta)$

Dobbiamo quindi calcolare $h_+''$. Si ha:

$$h_+'(t) = (-c_1 \sin t + c_2 \cos t)\, u(t) + (c_1 \cos t + c_2 \sin t) \cdot \delta(t)$$
$$= (-c_1 \sin t + c_2 \cos t)\, u(t) + c_1 \cdot \delta(t) \qquad (f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t))$$

$$h_+''(t) = (-c_1 \cos t - c_2 \sin t)\, u(t) + (-c_1 \sin t + c_2 \cos t)\,\delta(t) + c_1 \delta'(t)$$
$$= -(c_1 \cos t + c_2 \sin t)\, u(t) + c_2 \delta(t) + c_1 \delta'(t)$$

Adesso possiamo "bilanciare gli impulsi" $\quad y'' + y = x'$

$$h_+'' + h_+ = \delta'$$

$$-(c_1 \cos t + c_2 \sin t)\, u(t) + c_2 \delta(t) + c_1 \delta'(t) + (c_1 \cos t + c_2 \sin t)\, u(t) = \delta'(t)$$

$$c_2 \delta(t) + c_1 \delta'(t) = \delta'(t)$$

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow h_+(t) = \cos t \; u(t)$$

2) Trovare $h_+$ per l'EDOLCC $\quad y'' + y' - 2y = 2x' + x$

$$Q(s) = s^2 + s - 2 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$\varphi_1(t) = e^t \qquad \varphi_2(t) = e^{-2t}$$

$$n > m \Rightarrow \quad h_+(t) = \left(c_1 e^t + c_2 e^{-2t}\right) u(t)$$

$$h_+'(t) = \left(c_1 e^t - 2c_2 e^{-2t}\right) u(t) + (c_1 + c_2)\,\delta(t)$$

$$h_+''(t) = \left(c_1 e^t + 4c_2 e^{-2t}\right) u(t) + (c_1 - 2c_2)\,\delta(t) + (c_1 + c_2)\,\delta'(t)$$

$$h_+''(t) + h_+'(t) - 2h_+(t) = 2\delta'(t) + \delta(t)$$

$$\left(c_1 e^t + 4c_2 e^{-2t}\right) u(t) + (c_1 - 2c_2)\delta(t) + (c_1 + c_2)\delta'(t) +$$
$$+ \left(c_1 e^t - 2c_2 e^{-2t}\right) u(t) + (c_1 + c_2)\,\delta(t) +$$
$$-2\left(c_1 e^t + c_2 e^{-t}\right) u(t) = 2\delta'(t) + \delta(t)$$

$$(2c_1 - c_2)\,\delta(t) + (c_1 + c_2)\,\delta'(t) = \delta(t) + 2\delta'(t)$$

$$\begin{cases} 2c_1 - c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases} \qquad h_+(t) = \left(e^t + e^{-2t}\right) u(t)$$

3) Mostriamo ora un caso in cui bisogna aggiungere degli impulsi.

Consideriamo l'EDOLCC $y' + ay = x'$ con $a \in \mathbb{R}^+$

La base di $Y_0$ è $\varphi_1(t) = e^{-at}$

Se ponessimo solo $h_+(t) = c \cdot e^{-at} u(t)$, non potremmo "bilanciare gli impulsi". Infatti si avrebbe:

$$h_+'(t) = -ace^{-at} u(t) + c \cdot e^{-at} \cdot \delta(t) = -ace^{-at} u(t) + c\delta(t)$$

Sostituendo nell'equazione $a(D)(h^+) = b(D)(\delta)$ si ha:

$$-a ce^{-at} u(t) + c\,\delta(t) + ace^{-at} u(t) = \delta'(t)$$

$$c\,\delta(t) = \delta'(t)$$

Nessun c permette di soddisfare l'equazione. Il problema è che nel membro destro dell'equazione c'è $x'$, che genera degli impulsi derivati. Per farli apparire anche a sinistra, bisogna aggiungere a $h_+$ degli impulsi di ordine fino a $m-n$

In questo caso, posto

$$h_+(t) = c_1 e^{-at} u(t) + c_2 \delta(t), \quad \text{si ottiene:}$$

$$h_+'(t) = -ac_1 e^{-at} u(t) + c_1 \delta(t) + c_2 \delta'(t)$$

Inserendo $h_+$ e $h_+'$ nell'equazione, si ottiene

$$-a c_1 e^{-at} u(t) + c_1 \delta(t) + c_2 \delta'(t) + a c_1 e^{-at} u(t) + a c_2 \delta(t) = \delta'(t)$$

$$(c_1 + a c_2)\,\delta(t) + c_2 \delta'(t) = \delta'(t)$$

$$\begin{cases} c_1 + a c_2 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = -a \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

$$h_+(t) = \delta(t) - a e^{-at} u(t)$$

In questo caso, $h_+$ ha una "componente impulsiva"

Il sistema però è ancora stabile, perché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h_+(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-at} u(t)\,dt =$$

$$= 1 + \int_0^{+\infty} a e^{-at}\,dt = 1 + \left[e^{-at}\right]_{+0}^{+\infty} = 2$$

Se invece $m > n$, per bilanciare gli impulsi è necessario introdurre le derivate di $\delta$ in $h_+$, altrimenti nei membri sx e dx dell'equazione non compaiono le stesse derivate di $\delta$. In tal caso $h_+$ non è più assolutamente integrabile perché non lo è $\delta^{(k)}$

Esempio : Sistema massa-molla-smorzatore

È un sistema che può "risuonare": applicando ad un LTI un ingresso sinusoidale a frequenza opportuna, l'uscita è una sinusoide moltiplicata per un polinomio $\Rightarrow$ l'ampiezza diventa indefinitamente grande

Ciò si può avere in un sistema massa-molla-smorzatore in un caso particolare

$$my'' + cy' + ky = x \quad \Leftrightarrow \quad y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}x$$

Per prima cosa studiamo i modi del sistema

$$a(s) = s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

- Se $c > 2\sqrt{mk}$ $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sono reali, distinte, e negative, perché l'argomento della radice $\sqrt{c^2-4mk}$ è strettamente positivo e quindi $\varphi_1(t) = e^{\sigma_1 t}$ $\varphi_2(t) = e^{\sigma_2 t}$ $\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0$

$$h_+(t) = \left(c_1 e^{-|\sigma_1|t} + c_2 e^{-|\sigma_2|t}\right) u(t)$$ Sistema stabile

- Se $c = 2\sqrt{mk}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c}{2m} = -\frac{2\sqrt{mk}}{2m} = -\sqrt{\frac{k}{m}} = -|\sigma|$

Allora $\varphi_1(t) = e^{-|\sigma|t}$ $\varphi_2(t) = t\,e^{-|\sigma|t}$

$$h_+(t) = \left(c_1 e^{-|\sigma|t} + c_2 t e^{-|\sigma|t}\right) u(t)$$ stabile

- Se $0 < c < 2\sqrt{mk}$ $\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm j\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = \sigma \pm j\omega$ $\boxed{\text{con } \sigma < 0}$

Allora $\varphi_1(t) = e^{-|\sigma|t}\cos\omega t$ $\varphi_2(t) = e^{-|\sigma|t}\sin\omega t$

$$h_+(t) = u(t)\,e^{-|\sigma|t}\left(c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t\right)$$ Stabile

Infine, se $C=0$ (assenza dello smorzatore)

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{K}{m}} = \pm j\omega_0 \qquad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Le radici del polin. caratt. hanno parte reale nulla, mentre nei casi precedenti la parte reale era positiva

Adesso $h_+(t) = (c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \sin\omega_0 t)\, u(t)$ instabile

In effetti, se i polinomi a e b sono co-primi, . . .
e se $n \geq m$, condizione necessaria e sufficiente per la stabilità è che tutte le radici di $a(s)$ siano a parte reale negativa

Bilanciamo gli impulsi nel caso $C=0$

$$h_+'(t) = (-\omega_0 c_1 \sin\omega_0 t + \omega_0 c_2 \cos\omega_0 t)\, u(t) + \delta(t)\, c_1$$

$$h_+''(t) = (-\omega_0^2 c_1 \cos\omega_0 t - \omega_0^2 c_2 \sin\omega_0 t)\, u(t) + \delta(t)\cdot\omega_0 c_2 + \delta'(t)\, c_1$$

$$= -\omega_0^2 h_+(t) + \omega_0 c_2 \delta(t) + c_1 \delta'(t)$$

$$m h_+''(t) + k\, h_+(t) = -m\omega_0^2 h_+(t) + m\omega_0 c_2 \delta(t) + m c_1 \delta'(t) + k\, h_+(t) =$$

$$(m\cdot\omega_0^2 = K) \qquad = m\omega_0 c_2 \delta(t) + m c_1 \delta'(t) \quad \cancel{\delta(t)}$$

Per bilanciare gli impulsi, tale quantità deve essere pari a $\delta(t)$,
quindi $c_1 = 0$ e $c_2 = \frac{1}{m\omega_0}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h_+(t) = \frac{1}{m\omega_0} \sin\omega_0 t\, u(t)}$$

Adesso sfruttiamo questi risultati per risolvere il PCC:

$x(t) = F \cos \omega_0 t \; u(t)$ , $y(0^-)=0$, $y'(0^-)=0$

cioè applichiamo una forza con andamento sinusoidale e pulsazione "di risonanza" $\omega_0$ (o pulsazione propria) a partire da $t=0$ al sistema "a riposo" (cioè condizioni iniziali nulle)

Siccome le condizioni iniziali sono nulle, l'uscita del sistema è la risposta forzata:

$$y(t) = y_f(t) = h_+(t) * x(t) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_+(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m\omega_0} \sin[\omega_0 (t-\tau)]\, u(t-\tau)\, F \cos \omega_0 \tau \; u(\tau)\, d\tau$$

$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin($ (formula di Werner)

$$= \int_0^t \frac{F}{m\omega_0} \sin[\omega_0(t-\tau)] \cos \omega_0 \tau \, d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{F}{m\omega_0} \frac{1}{2}\left[ \sin \omega_0 t + \sin(\omega_0 (t-2\tau)\right] d\tau = \frac{F}{m\omega_0} \frac{1}{2} \sin \omega_0 t \int_0^t d\tau +$$

$$+ \frac{F}{m\omega_0} \frac{1}{2} \int_0^t \sin\left[\omega_0 (t-2\tau)\right] d\tau = \frac{F}{m\omega_0} \frac{t}{2} \cdot \sin \omega_0 t +$$

$$+ \frac{F}{2m\omega_0} \left. \frac{\cos[\omega_0 t - 2\omega_0 \tau]}{2\omega_0} \right|_{\tau=0}^{\tau=t} = \boxed{\frac{1}{2} \frac{F}{m\omega_0} t \cdot \sin \omega_0 t}$$

"sinusoide con ampiezza crescente": fenomeno della risonanza

## Applicazione della TF alla soluzione di una EDOLCC

La TF permette di costruire una soluzione particolare di una EDOLCC che sarà per costruzione stabile

Se quindi l'LTI causale associato all'EDOLCC è stabile ( $n \geq m$ e $Re(\lambda_i)<0$), possiamo usare questo metodo per trovare $h_+$

Se invece l'LTI non è stabile, questo metodo fornirà una soluzione stabile ma che non può essere $h_+$, quindi sarà una soluzione non causale

Se il sistema è stabile, possiamo calcolare la TF di $h_+$ e di tutte le sue derivate.

Infatti $\quad h_+(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)\, u(t) + d\,\delta(t) \quad$ (con $d=0$ se $n>m$)

Il termine $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)\, u(t)$ è $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, così come tutte le sue derivate, per la presenza dei termini $e^{\lambda_i t} \cdot u(t)$

Quindi ne sappiamo calcolare la TF

Anche il termine $d\,\delta(t)$ e le sue derivate ammettono TF, in quanto $\mathcal{F}(\delta(t)) = 1$ e $\mathcal{F}(\delta^{(k)}) = (j\omega)^k$ :

(possiamo applicare la formula della derivata perché $\delta^{(k)}(t) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} 0$ )

Allora possiamo applicare la TF ad ambo i membri della EDOLCC. Si ottiene

$$\mathfrak{F}(D^k h_+) = (j\omega)^k \cdot H_+(\omega)$$

$$\mathfrak{F}(a(D)(h^+)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (j\omega)^k H_+(\omega) = a(j\omega) \cdot H_+(\omega)$$

$$\mathfrak{F}(b(D)(\delta)) = \sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k = b(j\omega)$$

Imponendo l'EDOLCC si ha $a(j\omega) H_+(\omega) = b(j\omega)$

La stabilità impone che nessuna radice abbia parte reale nulla, quindi $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $a(j\omega) \neq 0$ e allora

$$H_+(\omega) = \frac{b(j\omega)}{a(j\omega)}$$

Allora per calcolare $h_+$, invece di usare il bilanciamento degli impulsi, possiamo calcolare la trasformata inversa di $H_+(\omega)$, il che è relativamente semplice usando la decomposizione in fratti semplici della funzione razionale $\frac{b(\cdot)}{a(\cdot)}$

Se invece qualche radice di $a$ non ha parte reale strettamente negativa, $h_+$ non si può trovare con la TF, perché quest'ultima è valida solo nel caso di $h_+ \in \mathcal{L}^1$

Applicando la TF, si trova comunque una delle infinite soluzioni di $a(D)(h) = b(D)(\delta)$, ma non quella causale, bensì una soluzione $\mathcal{L}^1$ ma non causale

Esempio Studio dell' EDOLCC $y'' + 4y' + 3y = \kappa$

Cominciamo dal polinomio caratteristico: $a(s) = s^2 + 4s + 3$

le cui radici sono $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3} \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$ reali, distinte, strett. negative

Una base di $Y_0$ è $\varphi_1(t) = e^{-3t}$ $\varphi_2(t) = e^{-t}$

Calcolo dell' evoluzione libera. Le condizioni iniziali sono $y_e(0^-) = y_0$, $y_e'(0^-) = y_1$

$y_e(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t} \Rightarrow y_e(0^-) = c_1 + c_2 = y_0$

$y_e'(t) = -3c_1 e^{-3t} - c_2 e^{-t} \Rightarrow y_e'(0^-) = -3c_1 - c_2 = y_1$

Risolvendo il sistema lineare si trova $c_1 = -\frac{y_0 + y_1}{2}$

$c_2 = \frac{3y_0 + y_1}{2}$

$$\boxed{y_e(t) = -\frac{y_0+y_1}{2} e^{-3t} + \frac{3y_0+y_1}{2} e^{-t}}$$

Sistema causale associato: calcolo di $h_+$

Calcoliamo $h_+$ con il bilanciamento degli impulsi.

Siccome $m < n$, $h_+(t) = (d_1\varphi_1(t) + d_2\varphi_2(t))u(t) = (d_1 e^{-3t} + d_2 e^{-t})u(t)$

$$h_+'(t) = [-3d_1 e^{-3t} - d_2 e^{-t}]u(t) + \delta(t)[d_1 + d_2]$$

$$h_+''(t) = [9d_1 e^{-3t} + d_2 e^{-t}]u(t) + \delta(t)[-3d_1 - d_2] + \delta'(t)[d_1 + d_2]$$

Bilanciamo gli impulsi:

$$h_+''(t) + 4h_+'(t) + 3h_+(t) = \delta(t)$$

$$[9d_1 e^{-3t} + d_2 e^{-t} - 12 d_1 e^{-3t} - 4d_2 e^{-t} + 3d_1 e^{-3t} + 3d_2 e^{-t}]u(t)$$
$$+ \delta(t)[-3d_1 - d_2 + 4d_1 + 4d_2] + \delta'(t)[d_1 + d_2] = \delta(t)$$

$$(d_1 + 3d_2)\delta(t) + (d_1 + d_2)\delta'(t) = \delta(t)$$

$$\begin{cases} d_1 + 3d_2 = 1 \\ d_1 + d_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1 = -1/2 \\ d_2 = 1/2 \end{cases} \qquad h_+(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})u(t)$$

Calcolo di $h_+$ con le TFtc.

Siccome $a(s)$ ha radici a parte reale negativa, il sistema è stabile e $h_+$ può essere calcolato con la TF

$$H_+(\omega) = \frac{b(j\omega)}{a(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3} = \frac{1}{(1+j\omega)(3+j\omega)}$$

Usiamo la decomposizione in fratti semplici
Le radici di $a(\cdot)$ sono $-1$ e $-3$ quindi possiamo scrivere

$$H_+(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3} = \frac{A}{1+j\omega} + \frac{B}{3+j\omega} = A \cdot \mathcal{F}(e^{-t}u(t)) + B\,\mathcal{F}(e^{-3t}u(t))$$

Calcolo di $A$: $\quad A = (1+j\omega)\cdot H_+(\omega)\Big|_{\omega=+j} = \frac{1}{3+j\omega}\Big|_{\omega=+j} = \frac{1}{2}$

Calcolo di $B$: $\quad B = (3+j\omega)\, H_+(\omega)\Big|_{\omega=+3j} = \frac{1}{1+j\omega}\Big|_{\omega=3j} = -\frac{1}{2}$

$$h_+(t) = \frac{1}{2}[e^{-t} - e^{-3t}]u(t)$$

Il metodo TF è veloce ma si può applicare solo se il sist. è stabile
La risposta forzata è $y_F(t) = h_+ * x(t)$

Che succede se proviamo ad applicare il metodo TFLc ad un'EDOLCC il cui sistema LTI causale associato <u>non è</u> stabile?

Con il metodo TF, la funzione $h(t)$ costruita sarà ancora una soluzione di $a(D)(h) = b(D)(\delta)$ ma non <u>può</u> essere causale, perché sappiamo che quella causale è instabile

Quindi avremo una $h(t)$ stabile, non causale che però non permette di calcolare $y_p$, perché per quest'ultima ci vuole $h_+(t)$

In caso di non-stabilità (cioè, almeno una delle radici di $a(s)$ ha parte reale non negativa) $h_+(t)$ si può sempre ricavare dal bilanciamento degli impulsi. Inoltre ricordiamo che $h_+(t) - h(t) \in Y_0$ quindi possiamo (potremmo) cercare un elemento di $Y_0$ che, sommato a $h(t)$, determini una funzione causale

<u>Esempio</u> Consideriamo l'EDOLCC $y'' - y' - 2y = x$

Si ha: $a(s) = s^2 - s - 2$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 - j\omega - 2} = \frac{A}{1+j\omega} + \frac{B}{-2+j\omega} = \frac{1}{(1+j\omega)(-2+j\omega)}$$

$$A = (1+j\omega)H(j\omega)\Big|_{\omega=j} = \frac{1}{-2+j\omega}\Big|_{\omega=j} = -\frac{1}{3} \qquad B = (-2+j\omega)H(j\omega)\Big|_{\omega=-2j} = \frac{1}{1+j\omega}\Big|_{\omega=-2j} = \frac{1}{3}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{3}\frac{1}{-2+j\omega} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+j\omega}$$

Dalle Tabelle dell TF, ricaviamo:

$$\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{1}{-2+j\omega}\right)(t) = -e^{2t}u(-t)$$

$$\Rightarrow \quad h(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+j\omega}\right)(t) = e^{-t}u(t)$$

Effettivamente $h$ è $\mathcal{L}^1$ ma non è causale essendo non nulla in $t<0$

In questo caso, Trovare $h_+$ è facile; basta osservare che per "eliminare" il contributo non causale, basta sommare a $h(t)$ un'opportuna funzione di $Y_0$ e cioè $\frac{1}{3}e^{2t}$

Si ha: $h(t) + y_0(t) = \frac{1}{3}e^{2t}(-u(-t)+1) - \frac{1}{3}u(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$

che è evidentemente causale e non $\mathcal{L}^1$

Verifichiamo con il bilanciamento degli impulsi che è proprio $h_+$:

$$h_+(t) = (c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t})u(t)$$

$$h_+'(t) = (2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t})u(t) + (c_1+c_2)\delta(t)$$

$$h_+''(t) = (4c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t})u(t) + (2c_1 - c_2)\delta(t) + (c_1+c_2)\delta'(t)$$

$$h_+''(t) - h_+'(t) - 2h_+(t) = \delta(t)$$

$$[(4c_1 - 2c_1 - 2c_1)e^{2t} + (c_2 + c_2 - 2c_2)e^{-t}]u(t) +$$
$$+ (2c_1 - c_2)\delta(t) + (c_1+c_2)\delta'(t) - 2(c_1+c_2)\delta(t) = \delta(t)$$

$$-3c_2\,\delta(t) + (c_1+c_2)\delta'(t) = \delta(t)$$

$$c_2 = -1/3 \qquad c_1 = 1/3$$

Ritroviamo la funzione individuata prima, che è $h_+(t)$

---

Vedremo che con la TL si può trovare $h_+$ senza bilanciamento degli impulsi