INTEGRAZIONE CON MONTE-CARLO

$$\int_a^b f(x)\,dx = \bar{f}\,(b-a)$$

Supponiamo di generare N punti, $x_{i\ i=1,N}$ distribuiti casualmente in $[a,b]$ e li chiamiamo $f_i = f(x_i)$

$$\bar{f} = \frac{1}{N}\sum_i f_i \pm \sqrt{\frac{Var(f)}{N}}$$

per calcolare (valutare) $Var(f) = \frac{1}{N}\sum_i \left(f_i - \bar{f}\right)^2$

NOTA:
se integro su $\mathbb{R}^n$
il metodo dei rettangoli o dei trapezi ha un'accuratezza di $O\left(\frac{1}{N^{2/n}}\right)$

mentre Monte-Carlo ha sempre $O\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right)$

per $n > 4$ M-C risulta più conveniente

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI COMPOSTE

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = \frac{1}{N}\sum_i f_i \pm \sqrt{\frac{Var(f)}{N}}$$

$p(x)$: densità di probabilità su $[a,b]$

con gli x_i distribuiti secondo $p(x)$

Dim: supponiamo di generare N valori x_i con N molto grande

$$dN = p(x)\,dx\,N$$

dN: numero di x_i entro dx

$$f_i\,dN = f(x)\,p(x)\,dx\,N$$

$$\frac{1}{N} f_i\,dN = f(x)\,dx$$

valore di f entro dx

ALGORITMI PER GENERARE x_i SECONDO $p(x)$

→ accetto-rigetto

1) partiamo da r generato in $[0,1[$ con distribuzione uniforme

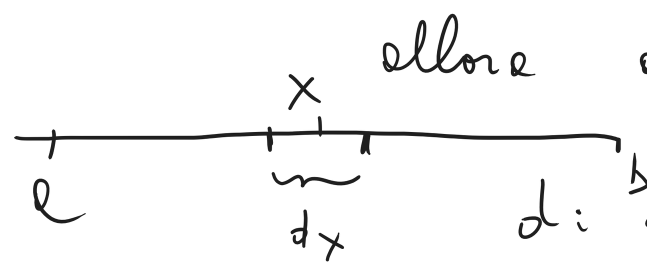
2) $r' = (b-a)r + a$

3) genero $z \in [0,1[$ distribuito in maniera uniforme

4) Sia $P_{max} = \max p(x)$

allora genero $x_i = r'$ se $z < \frac{p(r')}{P_{max}}$

Infatti se genero N di punti r allora avrò $dN' = \frac{N\,dx}{(b-a)}$ in dx di punti r'

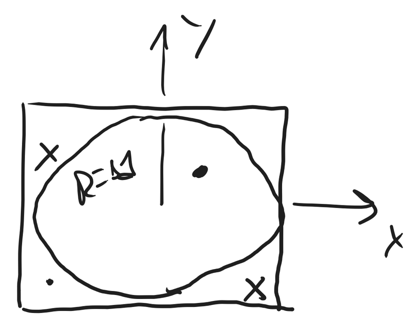


di questi solo $\frac{p(x)}{P_{max}}\,dN'$ saranno generati

infine genero $\frac{p(x)\,N\,dx}{P_{max}\,(b-a)}$ punti in dx centrato in x

ESEMPIO DI INT. CON M-C

Calcoliamo π



$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int f(x,y)\,dx\,dy = \pi$$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy\; f(x,y) = \pi$$