EQUAZIONE DELLE ONDE

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

condizioni

$$x \in [a,b]$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,t_0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t_0) = u_0'(x) \end{array}\right\} \text{sono date}$$

inoltre dobbiamo aggiungere condizioni al contorno (es. Dirichlet o Neumann)

Discretizziamo $\begin{cases} x_1 = a \\ x_N = b \end{cases} \Rightarrow h = \frac{b-a}{N-1}$

$$u_i^{(m)} = u(x_i, t_0 + \Delta t \cdot m)$$

$$\frac{\boxed{u_i^{(m+1)}} - 2u_i^{(m)} + u_i^{(m-1)}}{\Delta t^2} = c^2\left(\frac{u_{i+1}^{(m)} - 2u_i^{(m)} + u_{i-1}^{(m)}}{h^2}\right)$$

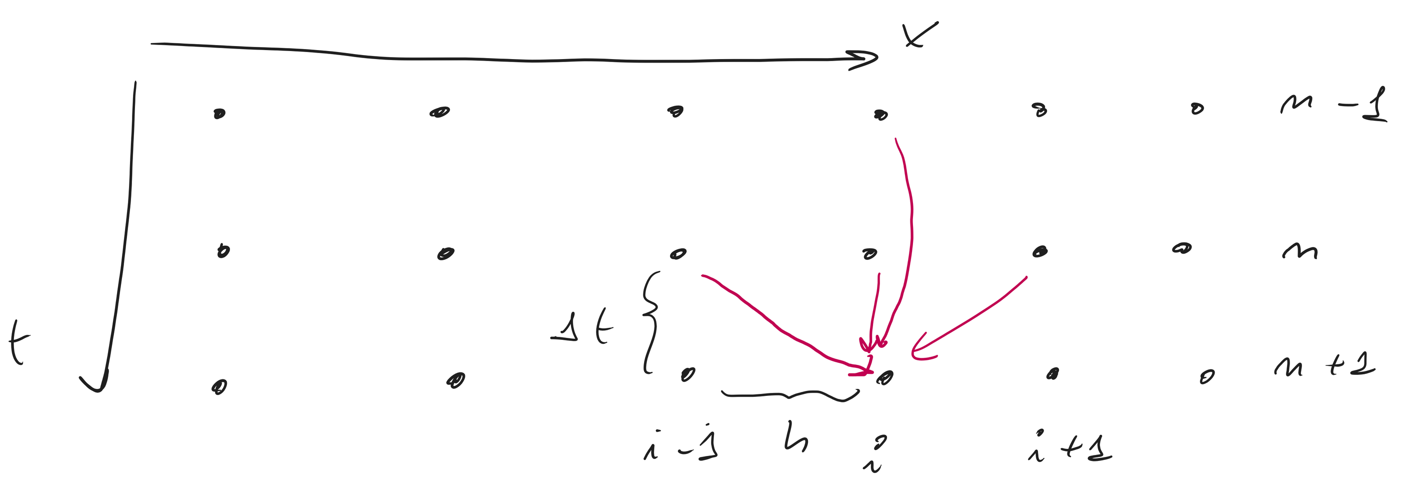
$$u_i^{(m+1)} = -u_i^{(m-1)} + 2u_i^{(m)} + \frac{\Delta t^2 c^2}{h^2}\left(u_{i+1}^{(m)} - 2u_i^{(m)} + u_{i-1}^{(m)}\right)$$

Primo passo

$$u(x, t_0 + \Delta t) = u(x,t_0) + \frac{\partial}{\partial t} u(x,t_0)\Delta t + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t_0)}_{\frac{1}{2}c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t_0)}\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

$$u_i^{(1)} = u_i^{(0)} + u_i' \Delta t + \frac{1}{2}c^2\left(\frac{u_{i+1}^{(0)} - 2u_i^{(0)} + u_{i-1}^{(0)}}{h^2}\right) + O(\Delta t^3)$$

Condizione di convergenza:



Ho convergenza solo se

$$c\Delta t \leq h$$

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq 1$$

Condizione di Courant Friedrichs Lewy

METODI DI MONTECARLO

(basati su numeri (pseudo)-casuali

Vogliamo numeri distribuiti in maniera casuale in $[0,1[$ in maniera uniforme

GENERATORE: LINEAR CONGRUENTIAL GENERATOR

definiamo $m \in \mathbb{N}$ detto periodo

definiamo $a, c \in \mathbb{N}$ $\quad a, c < m$

poniamo $x_0 \in \mathbb{N}$ $\quad x_0 < m$ $\quad$ detto SEME (seed)

$$x_{i+1} = \mathrm{mod}(a x_i + c, m)$$

indice di iterazione

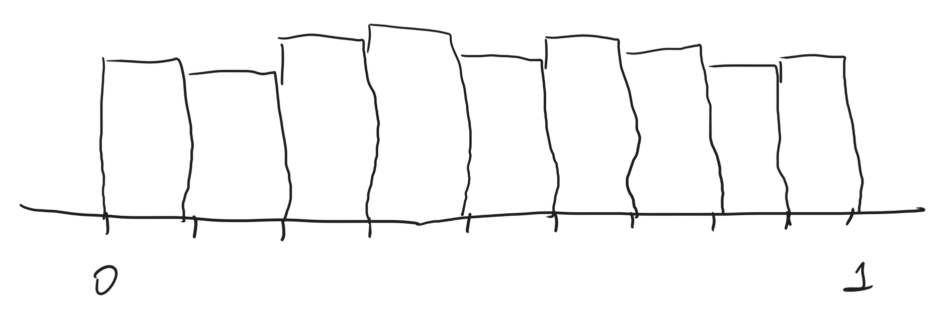
poi i nostri numeri casuali sono $t_i = \frac{x_i}{m}$

Noto vogli numeri distribuiti secondo la densità di probabilità $p(x) = 1$

infatti: $\int_0^1 p(x)\,dx = \int_0^1 dx = 1$

TESTS SU NUMERI CASUALI

Verifico che siano distribuiti in maniera uniforme



Posso considerare i momenti

variabile randomica

$$\langle x^k \rangle = \int_0^1 x^k p(x)\,dx = \int_0^1 x^k\,dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$$

valor medio

Infatti $\langle x \rangle = \frac{1}{2}$

Compareremo con

$$\overline{x^k} = \frac{1}{N}\sum_{i=1,N} x_i^k$$

NB $x_i \in [0,1[$ quelli generati!

Posso considerare la correlazione

Valore teorico

$$\langle x_i x_{i+l} \rangle = \langle x_i \rangle \langle x_{i+l} \rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Valore per la mia serie:

$$\overline{x_i x_{i+l}} = \frac{1}{N-l}\sum_{i=1,N-l} x_i x_{i+l}$$

Test grafico

x	y
$\downarrow$	$\downarrow$
x_1	x_2
x_3	x_4
x_5	x_6
x_7	x_8

PROVA:

parametri schifo $\quad m = 2048$, $a = 137$, $c = 0$

parametri di Park-Miller $\quad m = 2^{31} - 1$, $a = 7^5$, $c = 0$

ALGORITMO PER NUMERI CASUALI DISTRIBUITI SECONDO $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

Generiamo $r_1, r_2 \in [0,1[$ secondo distribuzione uniforme

$$x = \cos(2\pi r_2)\sqrt{-2\ln(r_1)}$$