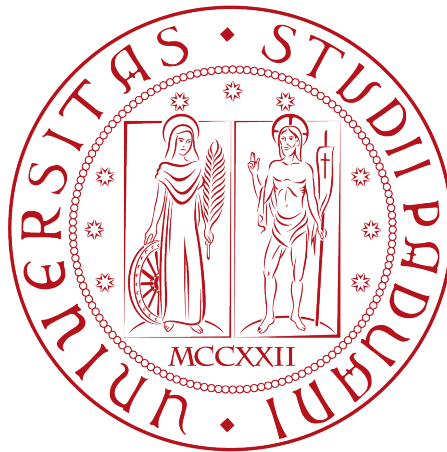


UNIVERSITA' DI PADOVA

**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE**

Tutorato di Analisi Matematica I
Docente del corso: prof. B.Bianchini



Argomento:

La Serie di Taylor - Il Ritorno

Tutor: Guido Costagliola

Email: guido.costagliola@studenti.unipd.it

ANNO ACCADEMICO: 2024/2025

1 Applicazione degli sviluppi di Taylor

1.1 Esercizio 1

Sia $f(x) = \sin(x + \alpha x^2) - xe^{(x-2x^3)}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i. Calcolare l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$ al variare di α ;
- ii. Dire se $x = 0$ è punto di massimo, di minimo o di flesso per $f(x)$ al variare di α ;
- iii. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x(\cos^2 x - e^{2x^2})}$$

al variare di α .

1.2 Esercizio 2

Sia $f(x) = e^{2x^2+x^3} - \cos(2x^2) - \log(1+x^3)$.

- i. Calcolare lo sviluppo di Taylor-Maclaurin di $f(x)$ fino all'ordine 5;
- ii. Dire se $x = 0$ è punto di massimo, di minimo o di flesso per $f(x) - \beta x^2$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$;
- iii. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x^2) - e^{x^4}}{f(x) - \beta x^2}$$

al variare di β .

1.3 Esercizio 3

Sia $f(x) = e^{2x^2+x^3} - 1$.

- i. Calcolare lo sviluppo di Taylor-Maclaurin di $f(x)$ fino all'ordine 4;
- ii. Dire se $x = 0$ è punto di massimo, di minimo o di flesso per $f(x) - \gamma \sin(x^2) - x^3$ al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$;
- iii. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \gamma \sin(x^2) - x^3}{\cos(3x^2) - 1}$$

al variare di γ .

1.4 Esercizio 4

Sia $f(x) = \cos(2x^2 + x^3) - 1 + \delta \sin(x^4)$ con $\delta \in \mathbb{R}$.

- i. Calcolare lo sviluppo di Taylor-Maclaurin di $f(x)$ fino all'ordine 5;
- ii. Dire se $x = 0$ è punto di massimo, di minimo o di flesso per $f(x)$ al variare di δ ;
- iii. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sin x - \tan x)}{f(x)}$$

al variare di δ .

1.5 Esercizio 5

Sia $f(x) = \cos(e^{x^2} - 1) - x^2 \log(1 + x^2 + 3x^4)$.

- i. Calcolare lo sviluppo di Taylor-Maclaurin di $f(x)$ fino all'ordine 6;
- ii. Dire se $x = 0$ è punto di massimo, di minimo o di flesso per $f(x) + \kappa x^4 - 1$ al variare di $\kappa \in \mathbb{R}$;
- iii. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \kappa x^4 - 1}{(\sin x - x \cos x)^2}$$

al variare di κ .

Soluzioni

Applicazione degli sviluppi di Taylor

Esercizio 1

i.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + \alpha x^2) - \frac{(x + \alpha x^2)^3}{6} - x \left[1 + (x - 2x^3) + \frac{(x - 2x^3)^2}{2} \right] + o(\dots) = \\ &= x + \alpha x^2 - \frac{x^3}{6} - x - x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = (\alpha - 1)x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Dunque $f(x)$ è di ordine 2 per $\alpha \neq 1$ e di ordine 3 per $\alpha = 1$.

ii. Per $\alpha > 1$ si ha un punto di minimo, per $\alpha < 1$ un punto di massimo, per $\alpha = 1$ un punto di flesso.

iii.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x(\cos^2 x - e^{2x^2})} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\alpha - 1)x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x \left[\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 - 1 - 2x^2 + o(x^3) \right]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\alpha - 1)x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x[-x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\alpha - 1)x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{-3x^3 + o(x^4)} = \\ &= \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1, \\ \frac{2}{9} & \text{se } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 2

i.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (2x^2 + x^3) + \frac{(2x^2 + x^3)^2}{2} - 1 + \frac{4x^4}{2} - x^3 + o(\dots) = \\ &= 1 + 2x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 - 1 + 2x^4 - x^3 + o(x^5) = \\ &= 2x^2 + 4x^4 + 2x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

ii.

$$f(x) - \beta x^2 = (2 - \beta)x^2 + 4x^4 + 2x^5 + o(x^5)$$

Per $\beta < 2$ si ha un punto di minimo, per $\beta > 2$ un punto di massimo, per $\beta = 2$ un punto di flesso.

iii.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x^2) - e^{x^4}}{f(x) - \beta x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{x^4}{2} - 1 - x^4 + o(x^4)}{(2 - \beta)x^2 + 4x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)}{(2 - \beta)x^2 + 4x^4 + o(x^4)} = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } \beta \neq 2, \\ -\frac{3}{8} & \text{se } \beta = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 3

i.

$$f(x) = 1 + 2x^2 + x^3 + \frac{(2x^2 + x^3)^2}{2} - 1 + o(\dots) = 2x^2 + x^3 + 2x^4 + o(x^4)$$

ii.

$$f(x) - \gamma \sin(x^2) - x^3 = 2x^2 + x^3 + 2x^4 - x^3 - \gamma x^2 + o(x^4) = (2 - \gamma)x^2 + 2x^4 + o(x^4)$$

Per $\gamma > 2$ si ha un punto di massimo, per $\gamma < 2$ un punto di minimo, per $\gamma = 2$ un punto di minimo.

iii.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \gamma \sin(x^2) - x^3}{\cos(3x^2) - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - \gamma)x^2 + 2x^4 + o(x^4)}{-1 + 1 - \frac{9}{2}x^4 + o(x^4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - \gamma)x^2 + 2x^4 + o(x^4)}{-\frac{9}{2}x^4 + o(x^4)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \gamma > 2, \\ -\infty & \text{se } \gamma < 2, \\ -\frac{4}{9} & \text{se } \gamma = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 4

i.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{(2x^2 - x^3)^2}{2} - 1 + \delta(x^4 + o(x^4)) = -2x^4 - 2x^5 + \delta x^4 + o(x^4) = \\ &= (\delta - 2)x^4 - 2x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

ii. Per $\delta = 2$ si ha un punto di flesso, per $\delta > 2$ un punto di minimo, per $\delta < 2$ un punto di massimo.

iii.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sin x - \tan x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(x - \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)}{(\delta - 2)x^4 - 2x^5 + o(x^5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^5}{2} + o(x^5)}{(\delta - 2)x^4 - 2x^5 + o(x^5)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta \neq 2, \\ \frac{1}{4} & \text{se } \delta = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 5

i.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1 \right) - x^2 \left[(x^2 + 3x^4) - \frac{(x^2 + 3x^4)^2}{2} + o(\dots) \right] = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{x^4}{2} + o(\dots) \right)^2 - x^2 \left[x^2 + 3x^4 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right] = \\ &= 1 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{2} - x^4 - 3x^6 + \frac{x^6}{2} + o(x^6) = 1 - \frac{3}{2}x^4 - 3x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

ii. $f(x) + \kappa x^4 - 1 = \left(\kappa - \frac{3}{2}\right) x^4 - 3x^6 + o(x^6)$. Per $\kappa = \frac{3}{2}$ si ha un punto di massimo, per $\kappa < \frac{3}{2}$ un punto di massimo, per $\kappa > \frac{3}{2}$ un punto di minimo.

iii.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \kappa x^4 - 1}{(\sin x - x \cos x)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\kappa - \frac{3}{2}\right) x^4 - 3x^6 + o(x^6)}{\left[x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right]^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\kappa - \frac{3}{2}\right) x^4 - 3x^6 + o(x^6)}{\frac{1}{9}x^6 + o(x^6)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \kappa > \frac{3}{2}, \\ -\infty & \text{se } \kappa < \frac{3}{2}, \\ -27 & \text{se } \kappa = \frac{3}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$