UNIVERSITA' DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Tutorato di Analisi Matematica I

Docente del corso: prof. B.Bianchini

Argomento:

La Serie di Taylor

Tutor: Guido Costagliola

Email: guido.costagliola@studenti.unipd.it

Anno Accademico: 2024/2025

"Haters gonna hate".

-Taylor (Swift)

1 Sviluppi in serie di Taylor

Ricordiamo la definizione della serie di Taylor di una funzione $f(x)$ attorno al punto $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2).$$

Fondamentali **da ricordare** sono gli sviluppi delle seguenti funzioni attorno a $x_0 = 0$:

- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$
- $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2)$
- $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
- $\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$
- $\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
- $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$

1.1 Esercizio 1

Calcolare i primi tre termini non nulli dello sviluppo di Taylor delle seguenti funzioni in $x_0 = 0$ (anche detto *sviluppo di Taylor-Maclaurin*).

$$(a) \quad f(x) = \frac{1+x}{1-x} \qquad\qquad (b) \quad f(x) = \arctan(x^2 - x)$$

1.2 Esercizio 2

Trovare fino al termine x^5 incluso gli sviluppi di Taylor-Maclaurin delle seguenti funzioni.

$$(a) \quad f(x) = \sin^2(x) - \sin(x^2) \qquad\qquad (b) \quad f(x) = \log(1 + \sin x)$$

$$(c) \quad f(x) = (e^x - 1)^2 \qquad\qquad (d) \quad f(x) = \frac{x - \sin x}{x^2}$$

2 Limiti con gli sviluppi di Taylor

2.1 Esercizio 1

Risolvere i seguenti limiti sfruttando opportunamente le espansioni in serie di Taylor.

1.

$$(a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{x^3(e^x-\cos x)} \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{(1-\cos x)\sin x}$$

2.

$$(a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x\arcsin x - x^2}{\sqrt{1+x^4}-\cos x^2} \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x\arctan x)-e^{x^2}+1}{\sqrt{1+x^4}-1}$$

3.

$$(a)\quad \lim_{x\to +\infty} \log(1+x)\sin\left(\frac{1}{\log(2x-1)}\right)$$

Soluzioni

Sviluppi in serie di Taylor

Esercizio 1

Applicheremo qui la definizione di serie di Taylor, andando a calcolare i coefficienti ordine per ordine attraverso il calcolo delle derivate prima e successive delle funzioni.

(a) Prima di tutto $f(0) = 1$.
I calcoli di derivata prima e seconda restituiscono:

$$f'(x) = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} \qquad f''(x) = \frac{4}{(1-x)^3}$$

Pertanto: $f'(0) = 2$ e $f''(0) = 4$. Allora i primi tre termini non nulli dello sviluppo in serie di Taylor-Maclaurin della funzione sono:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2) = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$$

(b) Per prima cosa $f(0) = 0$.
I calcoli di derivata prima, seconda e terza (lungo e tedioso) restituiscono:

$$f'(x) = \frac{2x-1}{1+(x^2-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2+2(x^2-x)^2-2(x^2-x)(2x-1)^2}{[1+(x^2-x)^2]^2}$$

$$f'''(x) = 2\frac{\{(2x-1)[(x^2-x)-(2x-1)^2]+(x^2-x)[2x-1-4(2x-1)]\}[1+(x^2-x)^2]^2+}{[1+(x^2-x)^2]^4}$$

$$\frac{-\{1+(x^2-x)[(x^2-x)-(2x-1)^2]\}4[1+(x^2-x)^2](x^2-x)(2x-1)}{\text{,, ,,}}$$

Pertanto: $f'(0) = -1$, $f''(0) = 2$ e $f'''(0) = 2$. Allora i primi tre termini non nulli dello sviluppo sono:

$$\arctan(x^2-x) = -x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Esercizio 2

Utilizzeremo qui invece gli sviluppi noti, senza passare per il calcolo di ciascuna derivata.

$$(a) \quad f(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - x^2 + o(x^5) = x^2 - \frac{x^4}{3} - x^2 + o(x^5) = -\frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

$$(b) \quad f(x) = \log\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)\right)^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5) =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + o(x^5)$$

$$(c) \quad f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 =$$

$$= x^2 + \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{6} + o(x^5) = x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + \frac{x^5}{4} + o(x^5)$$

$$(d) \quad f(x) = \frac{x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(x^7)}{x^2} = \frac{x}{6} - \frac{x^3}{5!} + \frac{x^5}{7!} + o(x^5)$$

Alcuni commenti: quando si effettuano gli sviluppi, bisogna star bene attenti a non dimenticare nessun termine, controllando attentamente quali sono quelli significativi che provengono dai vari quadrati, cubi, quarte e quinte potenze di binomi, trinomi etc... . Prestare molta attenzione in particolare ai doppi prodotti, di cui è facile dimenticarsi oppure confondersi. Questo discorso vale in particolare quando si sviluppa una funzione dentro l'argomento di un'altra funzione e poi si procede a sviluppare quest'ultima, come nel caso (b).

Limiti con gli sviluppi di Taylor

Esercizio 1

Discutiamo singolarmente i vari casi, sfruttando gli sviluppi noti riportati sopra.

1.

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^3(e^x - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2}{x^3(1 + x - 1 + o(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{3}$$

$$(b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{(1 - \cos x)\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{3} - \cancel{x} + o(x^3)}{\left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)(x + o(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \frac{2}{3}$$

2.

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x \arcsin x - x^2}{\sqrt{1 + x^4} - \cos x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - x^2}{\cancel{1} + \frac{x^4}{2} - \cancel{1} + \frac{x^4}{2} + o(x^7)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{6} + o(x^5)}{x^4 + o(x^7)} = \frac{1}{6}$$

$$(b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x\arctan x) - e^{x^2} + 1}{\sqrt{1 + x^4} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(1 + x\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\right) - \cancel{1} - x^2 - \frac{x^4}{2} + \cancel{1}}{\cancel{1} + \frac{x^4}{2} - \cancel{1} + o(x^7)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2} - \frac{x^4}{3} - \cancel{x^2} - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^7)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^7)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^7)} = -\frac{8}{3}$$

3.

$$(a) \qquad \lim_{x\to+\infty} \log(1+x)\sin\left(\frac{1}{\log(2x-1)}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x)}{\log(2x-1)}\left[1 + o\left(\frac{1}{\log(2x-1)}\right)\right] \sim$$

$$\sim \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log(2x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log 2 + \log x} = 1$$

Nota: nell'ultimo limite si è utilizzato il seguente fatto generale, che vale per qualsiasi funzione della quale si vuole trovare lo sviluppo

$$\sin(f(x)) \overset{f(x)\to 0}{=} f(x) - \frac{(f(x))^3}{6} + o((f(x))^5)$$

Ovvero, per usare gli sviluppi di Taylor-Maclaurin riportati sopra, non è necessario che $x \to 0$, ma che qualsiasi funzione $f(x)$ che sostituisca x nelle espressioni di sopra tenda a 0. Altri due esempi sono:

$$e^{\frac{1}{x}} \overset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) \overset{x\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$