ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA
PROGRAMMA dettagliato

Corsi di laurea in Scienze Statistiche, matricole DISPARI
Annalisa Cesaroni, a.a. 2024-2025

Testo Consigliato:
Analisi Matematica, M. Bertsch, R. Dal Passo & L. Giacomelli, McGraw-Hill Editore.

1. Elementi di base: insiemi, numeri, funzioni, funzioni elementari.

- Simboli e operazioni sugli insiemi. Simboli logici. Prodotto cartesiano.
- Insiemi numerici: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.
- Maggioranti e minoranti, massimo e minimo, estremo superiore e inferiore di insiemi di numeri reali. Caratterizzazione di estremo superiore e estremo inferiore.
- Proprietà di completezza per un insieme numerico. $\mathbb{Q}$ non è completo. Definizione dei numeri reali come completamento di $\mathbb{Q}$. Modello dei reali dato da allineamenti decimali. Modello geometrico: retta reale. Proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.
- Funzioni: definizione di funzione, dominio, immagine, grafico.
- Funzioni limitate superiormente, inferiormente, limitate.
- Funzioni pari e dispari, funzioni periodiche.
- Funzione iniettiva, composizione di funzioni, funzione inversa, funzione monotona, strettamente monotona, crescente, decrescente.
- Una funzione strettamente monotona è invertibile.
- Funzioni lineari. Potenze ad esponente naturale, radici n-esime in $\mathbb{R}$;
- Potenze ad esponente intero, razionale, reale e loro grafici.
- Funzioni esponenziali e logaritmi e loro grafici.
- Funzioni trigonometriche, trigonometriche inverse e loro grafici e proprietà.
- Funzioni iperboliche.

2. Limiti per funzioni di una variabile.

- Intorni: definizione di distanza euclidea, intorno di x_0 reale, intorno di $+\infty$ e di $-\infty$.
- Definizione di punto di accumulazione.
- Limite: definizione di limite (sia per x_0 ed L reali che infiniti ($\forall\varepsilon \quad \exists\delta$..., ecc..).
- Definizione di limite destro e sinistro.
- Definizione di funzione continua in un punto e in un insieme. Continuità e limiti delle funzioni elementari.
- Proprietà dei limiti: teorema di unicità del limite, teorema di permanenza del segno.
- Teorema del confronto (o "dei Carabinieri").
- Operazioni sui limiti: limite di somme, prodotti, rapporti, ecc.. per funzioni con limite finito.
- Aritmetizzazione parziale dei limiti: limite di somma, prodotto, reciproco e rapporto quando una delle funzioni è infinita, limite del prodotto di una funzione infinitesima per una localmente limitata.
- Forme indeterminate.
- Teorema sul limite di funzione composta.
- Primi limiti notevoli: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (con dim.) e limiti derivati.
- Infinitesimi, infiniti e confronti: definizione di infinito e di infinitesimo di ordine superiore (inferiore) e dello stesso ordine per $x \to x_0$.
- Funzioni asintotiche per $x \to x_0$.
- Scala di funzioni infinite a $+\infty$: $\log_a x$, x^α, a^x.
- $\lim_{x\to\pm\infty}(1 + 1/x)^x = e$ e limiti derivati: $\frac{e^x-1}{x}$ (con dim.), $\frac{log(x+1)}{x}$ (con dim.), quando $x \to 0$.
- Definizione di o piccolo per limiti di funzioni.
- Asintoti orizzontale, verticale e obliquo di una funzione f.

3.Successioni numeriche.

- Successioni a valori in $\mathbf{R}$: definizione di limite di successione.
- Successione convergente, divergente e irregolare e definizione con gli intorni.
-Criterio del rapporto per i limiti di successioni.
-Scala delle successioni infinite.
-Teorema ponte tra successioni e funzioni.
- Teoremi sui limiti di successione.
- Limite della successione geometrica.
- Esistenza del limite di successioni monotone.

4. Funzioni continue reali di variabile reale.

- Definizione di funzione continua e di continuità da destra e da sinistra.
- Teoremi su somme, prodotti, composizione di funzioni continue. - Punti di singolarità: eliminabile, di salto e di 2a specie, funzioni estendibili per continuità.
- Funzioni continue su intervalli: teorema dei valori intermedi (senza dim.).
- Massimi e minimi delle funzioni continue su intervalli chiusi e limitati: teorema di Weierstrass (senza dim.).

5. Derivate e calcolo differenziale.

- Rapporti incrementali e derivate per funzioni reali di variabile reale.
- Interpretazione geometrica della derivata, retta tangente al grafico.
- Derivate delle funzioni elementari (dim. per x^2, e^x).
- Se f derivabile allora è continua (con dim.).
- Regole di derivazione: somma, prodotto e quoziente.
- Derivata di funzioni composte.
- Derivata della funzione inversa. Derivata del $\log x$, $\arcsin x$, $\arctan x$ come funzioni inverse (con dim.)
- Calcolo delle derivate.
- Teorema sul limite di f' per calcolare la derivata in un punto.
- Derivata sinistra e destra, punti angolosi, cuspidi, punti a tangente verticale.
- Estremi locali e derivate: definizione di punto di minimo e massimo locale per f.
- Teorema di Fermat (con dim.).
- Teorema di Lagrange o del valor medio.
- Monotonia e derivata: Criterio di monotonia per funzioni derivabili (con dim.).
- Teorema della derivata nulla (con dim.).
- Derivate successive: definizione di derivata n-esima.
- Funzioni convesse e concave: definizione. Definizione di flesso.
- Criterio di convessità per f due volte derivabili.
- Il metodo di Newton o delle tangenti per determinare soluzioni approssimate di equazioni $f(x) = 0$ su un intervallo, con f convessa.
- Studio del grafico di una funzione.
- Teorema di de l' Hôpital.
- Polinomio di Taylor: definizione. Teorema di Taylor con resto di Peano.
-Polinomi di Taylor (detti anche di Mac Laurin) delle funzioni elementari (dim. per e^x, $\sin x$).
- Limiti con i polinomii di Taylor.

6. Serie numeriche

- Successione delle somme parziali (somme ridotte), somma di una serie. Definizione di serie numerica convergente, divergente e irregolare (indeterminata).
- La serie geometrica di parametro q (dim. del suo comportamento).
- La serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, al variare di α.
- Condizione necessaria per la convergenza di una serie (con dim.).
- Serie a termini non negativi. Una serie a termini non negativi non può mai essere irregolare (con dim.).
- Criteri di convergenza per serie a termini non negativi: criterio del confronto asintotico, del rapporto, della radice.
- Definizione di convergenza assoluta per serie con termini di segno qualsiasi. Relazione con la convergenza.

- Serie con termini di segno alterno: criterio di convergenza di Leibniz.

7. Calcolo integrale e integrali in senso improprio.

- Integrale di Riemann per funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato: somme inferiori e somme superiori, definizione di integrale di Riemann, significato geometrico dell'integrale.
- Proprietà dell'integrale: linearità, confronto, additività rispetto all' intervallo di integrazione.
- Teorema della media integrale per funzioni continue.
- Funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo integrale (con dim.).
- Definizione di primitiva di una funzione.
- Caratterizzazione dell'insieme delle primitive di una funzione in un intervallo (con dim.).
- Corollario del teorema fondamentale del calcolo integrale (con dim.): calcolo di integrali definiti mediante primitive.
- Integrazione per parti e per sostituzione.
- Integrazione di alcune funzioni razionali (si vedano i casi svolti a lezione).
- Integrali generalizzati di funzioni continue non negative su intervalli illimitati.
- Integrali generalizzati di funzioni continue non negative illimitate su intervalli limitati del tipo $(a, b]$.
- Criterio del confronto asintotico, per integrali generalizzati
- Convergenza di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ (con dim. per $\alpha = 1, 2, 1/2$) e di $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ (con dim. per $\alpha = 1, 2, 1/2$), al variare di $\alpha > 0$.
- Convergenza di $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}\, dx$, al variare di α e β.
- Criterio integrale per le serie a termini positivi e dimostrazione della convergenza/divergenza della serie armonica generalizzata.

-Funzione Gamma di Eulero.

8. Funzioni di più variabili reali.

- Definizione di funzione di 2 variabili reali a valori reali, dominio. Grafico per funzioni di due variabili.
- Derivate parziali e derivabilità di una funzione.
- Derivate seconde di una funzione in due variabili e matrice Hessiana.
- Punti critici di una funzione in due variabili. Teorema di Fermat per funzioni in due variabili.
- Criterio dell'Hessiana per determinare la natura dei punti critici (in 2 variabili)

N.B. I teoremi da sapere con dimostrazione sono solo quelli in cui viene specificato "(con dim.)". Per gli altri teoremi, lo studente deve essere in grado di esporre rigorosamente l'enunciato, spiegare il significato e le applicazioni del risultato. Lo studente deve inoltre saper enunciare tutte le definizioni in modo rigoroso. Gli esempi inclusi nel testo non fanno parte del programma di teoria, ma se ne consiglia vivamente la lettura per una migliore comprensione degli argomenti svolti.